dr inż. Stanisław Bocian
Instytut Pojazdów Szynowych „TABOR"

Złożoność półgrupy charakterystycznej sumy prostej automatów asynchronicznych silnie spójnych i ustalonych analogów ich rozszerzeń dla każdego słowa z języka $\Sigma^{+} = (\sigma_0 \cup \sigma_1)^{+}$

Półgrupa charakterystyczna automatu ingeruje w algorytm obliczeniowy uogólnionych homomorfizmów automatów, zatem wyznaczenie złożoności półgrupy charakterystycznej pozwala na oszacowanie złożoności obliczeniowej uogólnionych homomorfizmów dla innych klas automatów. W zakresie modelu matematycznego koncepcja ustalonego analogu rozszerzenia automatu A związanego z izomorfizmami $g^{0,}$ g^{1},..., g^{q-1}, gdzie q stopień rozszerzenia, przy odpowiednich założeniach symuluje automat zmienny w czasie. Automat zmienny w czasie jest adekwatnym modelem matematycznym dla wielu procesów technicznych i obliczeniowych czasu rzeczywistego. Automaty te symulują pracę kilku automatów za pomocą jednego automatu zmiennego w czasie. Sumę prostą automatów można uważać za realizację – odpowiednio sekwencyjnych obliczeń.

1. WSTĘP

Maszyna o skończonej liczbie stanów FSM (Finite State Machine – Skończona Maszyna Stanowa, lub automat cyfrowy) jest jednym z modeli opisującym zachowanie systemów sterowania, w którym chwilowe działanie systemu jest w sposób naturalny reprezentowane w formie stanów i przejść między nimi. W teorii automatów rozważa się pewne abstrakcyjne modele układów cyfrowych, to znaczy elementów i układów pracujących w dyskretnych chwilach czasu, przy czym sygnały mają skończoną liczbę wartości. Teoria automatów będąca teoretycznym rozwinięciem układów logicznych – jest skutecznym narzędziem projektowania, umożliwiającym formalne projektowanie złożonych układów cyfrowych z zastosowaniem standartowych układów elementarnych.

Rozwój teorii automatów był stymulowany przez dwie uzupełniające się tendencje:

a) konstruowanie modeli bliżej związanych ze współczesnym sprzętem i oprogramowaniem,
b) znajdowanie poprawnych narzędzi matematycznych (języka matematycznego), w którym można wyrazić procesy obliczeniowe o dużej różnorodności.

Algebraiczna teoria automatów z jednej strony jest teoretycznym uogólnieniem teorii układów logicznych, z drugiej strony może być traktowana jako dział algebry.

Z postaci abstrakcyjnej, w procesie syntezy, można je przekształcić w schemat logiczny, wzrastające co do wielkości i złożoności problemy w informatyce, oprogramowanie lub ich kombinację. Tym samym uczy teoria automatów jak koncepcyjnie i obliczeniowo rozważać wzrastające co do wielkości i złożoności problemy w informatyce.

Rozwój teorii automatów związany jest ze wzrostem znaczenia techniki komputerowej w różnych gałęziach przemysłu, jak również z doskonaleniem metod analizy i syntezy cyfrowych układów sterowania z uwzględnieniem skali scalania i złożoności funkcjonalnej

podzespołów cyfrowych. Ten ostatni czynnik miał szczególny wpływ na rozwój teorii automatów zmiennych w czasie, bowiem automat zmienny w czasie jest adekwatnym modelem dla wielu procesów technicznych i obliczeniowych czasu rzeczywistego. Dlatego też interesujące są takie realizacje automatu, które z jednej strony symulują pracę kilku automatów za pomocą jednego automatu zmiennego w czasie, a z drugiej strony są niezależne od aktualnego stanu technologii bądź uwzględniają jej najnowsze trendy.

W zakresie teorii automatów zmiennych w czasie pojawiło się szereg opracowań [18,19,20, 21,24,26,27,28,29]. Wyniki dotyczące spójności i silnej spójności [5,25,28,29], rozszerzeń automatów [5,26,28,29], funkcji zachowujących operacje [5,17,20,21,27,28,29], miały istotny wpływ na poszukiwanie złożoności półgrup charakterystycznych automatów, które stosunkowo prosto opisują niektóre własności automatów. Problemy półgrup charakterystycznych automatów przedstawiono w pracach [21,26,27,28,29]. W pracy [27,28,29] badano właściwości półgrupy charakterystycznej automatu silnie spójnego, a także półgrupy charakterystycznej ustalonego analogu różnych sum okresowych związanych z izomorfizmami stanowymi.

Algebraiczna teoria automatów jest dynamicznie rozwijającą się teorią, która z jednej strony jest teoretycznym uogólnieniem teorii układów logicznych, z drugiej strony może być traktowana jako dział algebry [1,3,18,21,23,29]. Pojęcia z algebry w postaci sformalizowanej są analizowane i przekształcane do postaci dogodnych do optymalizacji.

Od wielu lat jesteśmy świadkami intensywnego rozwoju teorii automatów, szczególnie algebraicznej teorii automatów rozwijanej na gruncie teorii półgrup [4,26,27,28,29]. Definicja relacji równoważności Myhilla na zbiorze stanów automatu oraz półgrup charakterystycznych automatu pozwoliły wydobyć zeń możliwości obliczeniowe. Dekompozycja półgrup pozwala wprowadzić pojęcie automatów nieredukowalnych, z których można złożyć wszystkie pozostałe automaty.

Półgrupa charakterystyczna jest szczególnie istotnym pojęciem w teorii automatów; jest nośnikiem ważnych informacji i określa zdolność do przetwarzania informacji. Ma to bezpośrednio ważkie konsekwencje praktyczne w sferze projektowania optymalnych układów logicznych.

Dla badań złożoności półgrupy charakterystycznej automatów ważne są następujące motywacje:

a) w ogólnym przypadku półgrupa charakterystyczna posiada n^n elementów, dlatego interesujące jest pokazanie klasy automatów, które posiadają wielomianową zależność liczby elementów półgrupy charakterystycznej od liczby stanów,
b) półgrupa charakterystyczna, zgodnie z [27,28,29], ingeruje w algorytm obliczeniowy uogólnionych homomorfizmów automatów, zatem wyznaczanie złożoności półgrupy charakterystycznej pozwala na oszacowanie złożoności uogólnionych homomorfizmów automatów,
c) algorytm obliczeniowy uogólnionych homomorfizmów automatów stanowi rozwiązanie problemu wyznaczania automatu, który „ma możliwość" drugiego automatu,

W publikacjach [6,7,8] przedstawiono między innymi wyniki na złożoność półgrup charakterystycznych sumy prostej automatu $DFASC_2$ (deterministic finite asynchronous strongly connected) i EXT $DFASC_2$ (deterministic finite asynchronous strongly connected extensions) dla słowa z alfabetu dwuliterowego. Dla tej klasy automatów przeprowadzono uproszczony dowód na złożoność półgrupy charakterystycznej sumy prostej automatu dla słów $x_0 = \sigma_0\sigma_1$; $x_1 = \sigma_1\sigma_0$.

Dla zrozumienia dowodów na złożoność półgrup charakterystycznych sumy prostej automatów z klasy $DFASC_2$ i EXT $DFASC_2$ dla każdego słowa z języka $\Sigma^+ = (\sigma_0 \cup \sigma_1)^+$, należy przeprowadzić pełen dowód, na złożoność półgrup charakterystycznych sumy prostej automatu z klasy $DFASC_2$ i EXT $DFASC_2$ dla słowa $x_0 = \sigma_0\sigma_1$, $x_1 = \sigma_1\sigma_0$.

W pracach [14,15] przeprowadzono dowody na złożoność półgrup charakterystycznej sumy prostej automatu z klasy $DFASC_2$ i EXT $DFASC_2$ dla słowa z alfabetu dwuliterowego

W pracy przeprowadzono także dowód na złożoność półgrup charakterystycznych automatu z klasy EXT $DFASC_2$ dla każdego słowa z języka $\Sigma^+ = (\sigma_0 \cup \sigma_1)^+$ (tw. 3)

Ze względu na zrozumienie dowodu tw. 3 przedstawiono także dowody tw. 1 i 2

2. ROZWAŻANIA WPROWADZAJĄCE

Relację $R \subseteq X \times Y$ nazywamy funkcją, gdy dla każdego $a \in X$ istnieje dokładnie jeden element $b \in Y$ taki że $a\,R\,b$. Zbiór X jest nazywany zbiorem określoności, a zbiór Y zbiorem wartości funkcji. Funkcja f jest $1-1$ (różnowartościowa, jednoznaczna), gdy $a_1 \neq a_2$ implikuje, że $f(a_1) \neq f(a_2)$. Funkcja jest „na ", gdy $Y = \{ b : b = f(a), a \in X \}$. Grupoidem nazywamy parę uporządkowaną $(S \circ)$ gdzie: S niepusty zbiór, $(\circ)$ operacja binarna na zbiorze stanów S. Operacją binarną na zbiorze S nazywamy przekształcenie niepustego podzbioru zbioru $S \times S$ w zbiór S. Binarną operację $(\circ)$ na zbiorze S nazywamy łączną (asocjatywną), jeśli $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ dla wszystkich $a, b, c \in S$. Półgrupa, to taki grupoid $(S, \circ)$, w którym operacja $(\circ)$ jest asocjatywna. Niech Σ będzie dowolnym zbiorem niepustym. Zbiór Σ będziemy nazywali alfabetem, a jego elementy literami. Słowem x w alfabecie Σ nazywamy dowolny ciąg liter alfabetu, napisanych obok siebie, a długość słowa (oznaczoną przez $|x|$) nazywamy liczbę tych liter σ.

Skończonym automatem zdeterminowanym bez wyjść nazywam uporządkowaną trójkę (S, Σ, M), gdzie:

S – jest skończonym, niepustym zbiorem stanów,

Σ – jest skończonym, niepustym zbiorem wejść,

$M: \; S \times \Sigma \rightarrow S$ jest funkcją przejść.

Symbolem Σ^+ oznaczać będziemy przeliczalny nieskończony zbiór ciągów o skończonej długości, utworzony z elementów zbioru Σ. Zbiór Σ^+ razem z operacją konkatenacji (operacja połączenia dwóch słów, polegającą na napisaniu ich obok siebie w celu otrzymania nowego słowa), tworzy półgrupę wolną zwaną półgrupą wejściową. Symbole Σ^*

oznaczać będziemy monoid wejściowy, czyli $\sum^* = \sum^+ \cup \lambda$, gdzie λ jest ciągiem pustym.

Funkcję M rozszerzamy do obszaru określoności $S \times \sum^+$ w następujący sposób: niech $M\ (s,\ x)$ będzie zdefiniowane, wtedy:

$M(s,\ x\sigma) = M\ (M\ (s,\ x),\ \sigma)$ dla każdego $s \in S,\ x \in \sum^+, \sigma \in \sum$.

Na zbiorze $\sum^*$ zdefiniujemy relację:

$x\ R\ y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_{s \in S}\ M\ (s,x) = M\ (s,y)$.

R jest relacją równoważności (relacja Myhilla). Klasę równoważności zawierającą element $x \in \sum^*$ oznaczać będziemy $\bar{x}$, a zbiór wszystkim klas równoważności oznaczać będziemy $\bar{I}$. Zbiór $\bar{I}$ łącznie z operacją $(\circ)$, gdzie $\bar{x} \circ \bar{y} = \overline{xy}$ tworzy półgrupę (odpowiednio monoid), zwaną półgrupa charakterystyczną (odpowiednio monoidem charakterystycznym). Półgrupę charakterystyczną automatu A oznaczać będziemy $\overline{I(A)}$.

Dla automatu $A = (S,\ \sum,\ M)$ definiujemy automat charakterystyczny $\bar{A} = (S, \overline{I(A)},\ \bar{M})$, gdzie funkcja przejść $\bar{M}$ jest zdefiniowana następująco $\bar{M}\ (s,\ \bar{x}) = M\ (s,\ x)$.

Składnikiem autonomicznym automatu $A = (S, \Sigma, M)$ nazywamy automat $A_x = (S, \{x\}, M_x)$ gdzie $x \in \sum^*$ i M_x jest ograniczeniem M do $S \times \{x\}$.

Dla każdego $x \in \sum^*$ zdefiniujemy przekształcenie f_x zbioru S w siebie, gdzie :

$f_x(s) = M\ (s,\ x)$, dla każdego $s \in S$. Przekształcenie f_x jest implikowane przez x. Zbiór przekształceń zbioru S w siebie implikowanych przez wszystkie elementy z $\sum$ będziemy oznaczać symbolem J. J ze względu na operację superpozycji, jest zbiorem generatorów pewnej półgrupy.

Półgrupa F jest antyizomorficzna z $\bar{I}$ ponieważ:

$\varphi:\ \bar{I} \to F,\qquad \varphi(\bar{x}) = f_x,$ gdzie $x \in I,\ \bar{x} \in \bar{I}$ przy czym:

(i) $\varphi(\bar{x} \circ \bar{y}) = \varphi(\overline{xy}) = f_{xy} = f_y\ (f_x) = \varphi(\bar{y})\ \varphi(\bar{x})$

(ii) $\varphi(\bar{x}) = \varphi(\bar{y}) \Rightarrow f_x = f_y \Rightarrow \forall_{s \in S}\ M\ (s,\ x) = M\ (s, y) \Rightarrow x\ R\ y \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$, a zatem φ jest „1−1"

(iii) $\varphi(\bar{x}) = f_x \Rightarrow \varphi^{-1}\varphi(\bar{x}) = \varphi^{-1}(f_x) \Rightarrow \bar{x} = \varphi^{-1}(f_x)$, a zatem φ jest na.

Automat można zatem zdefiniować jako parę (S, J) a automat charakterystyczny automatu (S, J) jako parę (S, F).

Automat $A = (S,\ \Sigma,\ M)$ jest silnie spójny wtedy i tylko wtedy, jeśli dla każdej pary (s_1, s_2) stanów automatu A istnieje element x z półgrupy wejściowej taki, że

$M\ (s_1,\ x) = s_2$.

Automat $A = (S,\ \Sigma,\ M)$ będziemy nazywać asynchronicznym wtedy i tylko wtedy gdy, gdy dla każdego $s \in S$ i $\sigma \in \Sigma$ zachodzi $M\ (s, \sigma) = M\ (s, \sigma\ \sigma)$.

Automat $A = (S,\ \Sigma,\ M)$ jest zupełny, jeśli jego funkcja przejścia jest zupełna.

Automat $A = (S,\ \Sigma,\ M)$ jest w pełni określony, jeśli jego funkcja przejść jest w pełni określona.

Niech $A = ({}^AS,\ \Sigma,\ {}^AM)$ i $B = ({}^BS,\ \Sigma,\ {}^BM)$ będą automatami deterministycznymi. Funkcja $f:\ A \to B$ jest rozumiana jako funkcja przekształcająca ${}^AS$ w ${}^BS$. Funkcja $f:\ A \to B$ nazywamy homomorfizmem (zachowuje operacje), jeżeli:

$f\ ({}^AM\ (s, \sigma)) = {}^BM\ (f(s), \sigma))$, dla każdego $s \in S$ i $\sigma \in \Sigma$.

Jeżeli $f:\ A \to B$ jest „1-1” i „na” oraz zachowuje operacje to f nazywamy izomorfizmem.

Homomorfizmem uogólnionym automatu A w B nazywamy parę przekształceń (f_1, f_2) takich, że: $f_1 :\ {}^AS \xrightarrow{w} {}^BS$, $\quad f_2 :\ {}^A\Sigma^* \xrightarrow{w} {}^B\Sigma^*$ oraz

$f_1({}^AM(s,x)) = {}^BM(f_1(s), f_2(x))$ dla każdego $s \in {}^AS,\ x \in {}^B\Sigma^*$.

Niech $q \geq 2$ i $A^0 = (S^{q-1}, \Sigma, M^{q-1})$ będzie automatem, niech, $A^1 = (S^1, \Sigma, M^1), \ldots, A^{q-1} = (S^{q-1}, \Sigma, M^{q-1})$ będą obrazami izomorficznymi związanymi z izomorfizmami stanowymi

$g^1 \in Iz(A^0 \to A^1), \ldots,\qquad g^{q-1} \in Iz(A^{q-2} \to A^{q-1})$.

Rozszerzeniem q automatu A związanym z izomorfizmami stanowymi $g^0, g^1, \ldots, g^{q-1}$ nazywamy trójkę uporządkowaną $\quad ext_q(A) = \left({}^{ext_q(A)}S,\ \Sigma,\ {}^{ext_q(A)}M\right)$

gdzie:

${}^{ext_q(A)}S = (S^0, S^1, \ldots, S^{q-1})$

${}^{ext_q(A)}M^q = (M^{q,0}, M^{q,1}, \ldots, M^{q,q-1})$

$g^i : S \to S^i \qquad\qquad i = 0,1,\ldots,q-1$

$S = \{s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}\} \qquad\qquad S^i = \{s_0^i, s_1^i, \ldots, s_{n-1}^i\}$

natomiast $\quad s_j^i = g^i(s_j) \qquad\qquad j = 0,1,\ldots,n-1$

Ustalonym analogiem rozszerzenia $ext_q A=(S,\Sigma,M)$ automatu $A=(S,\Sigma,M)$ związanego z izomorfizmami $g^0,g^1,...,g^{q-1}$ jest trójka uporządkowana $\left(ext_q(A)\right)^*=\left({}^{ext_q(A)}S^*,\Sigma,{}^{ext_q(A)}M^*\right)$

gdzie:

${}^{ext_q(A)}S^*=\bigcup_{i=0}^{q-1}S^i$; a ${}^{ext_q(A)}M^*: {}^{ext_q(A)}S^*$ $\times\Sigma \to {}^{ext_q(A)}S^*$

jest funkcją przejść zdefiniowaną dla dowolnych $s\in S^i$, jak następuje ${}^{ext_q(A)}M^*(s,\sigma)=M^{q,i}(s,\sigma)$. Dla wszystkich przedstawionych rozważań $\Sigma=\{\sigma_0,\sigma_1\}$

wprowadzamy $x_0=\sigma_0,\sigma_1$ i $x_1=\sigma_1\sigma_0$, dla których $f_{x_0}=f_{\sigma_1}\left(f_{\sigma_0}\right)$, $f_{x_1}=f_{\sigma_0}\left(f_{\sigma_1}\right)$. Dla dowolnego $x\in\Sigma^*$ zdefiniujemy przekształcenie $f_x:\ S\xrightarrow{w}S$ określone jak następuje: $\forall_{s\in S}\, f_x(s)=M(s,x)$ gdzie: dla $x=x'\sigma$ mamy $\forall_{s\in S}\, f_x(s)=f_{x'\sigma}(s)=f_\sigma(f_{x'}(s,\sigma))$.

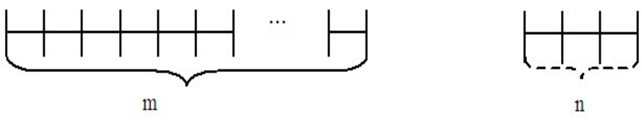
3. Graficzna interpretacja nowego sposób wyznaczania Najmniejszej Wspólnej Wielokrotności NWW [m, n] dwóch liczb naturalnych

Dla zrozumienia wyznaczania nowego sposobu NWW [m, n] w szczególności dla przeprowadzania dowodów na złożoności półgrup sumy prostej automatów z klasy $DFASC_2$ i EXT $DFASC_2$ istotne jest pokazanie NWW [m, n] w odpowiedniej interpretacji graficznej.

Niech m, n liczby naturalne, m > n ; k_0 najmniejsza całkowita wielokrotność liczby n w m.

$d_0 = m – k_0$ n.

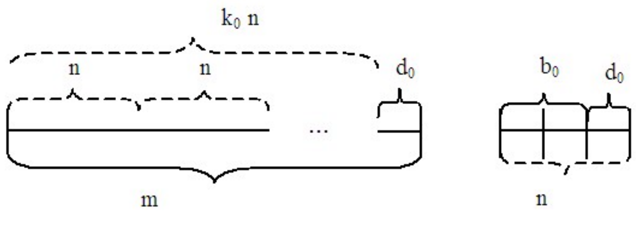
Jeśli $d_0 = 0$, to m = k_0 n, i wtedy [m, n] = m



Rys.1. Graficzne przedstawienie liczby m, n (liczby stanów automatów A i B)

W przypadku $d_0 \neq 0$ wyznaczamy [m, n] następująco:

$d_0 = m – k_0$ n; $b_0 = n – d_0$



Rys. 2. Pierwszy etap wyznaczania NWW[m, n]

$d_1 = m – b_0 – k_0$ n; $b_1 = n – d_1$

albo

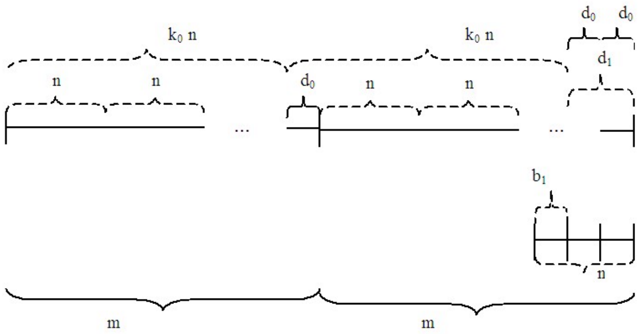
$d_1 = d_0 – b_0$

$d_1 = d_0 – (n – d_0) =$ **$2\ d_0 – n$**

$d_1 = m – k_0$ n – n + d_0 czyli

$d_1 = m – n (k_0 +1) + d_0$

Graficznie to możemy przedstawić wykorzystując jedną z zależności na **d_1** czyli **$d_1 = 2d_0 – n$** w następujący sposób:



Rys. 3. Drugi etap wyznaczania NWW [m, n]

Postępując analogicznie według podanego algorytmu wyznaczamy d_2 ,..., d_{w-2}, oraz b_1 ,..., b_{w-2}, aż do $d_{w-1} = m – b_{w-2} – k_0$ n = 0 co umożliwi nam wyznaczanie NWW liczb naturalnych m, n i wtedy [m, n] = w m.

W przypadku, gdy $d_i < 0$; gdzie: $0 < i < w − 1$, to w miejsce b_i wpisujemy bezwzględną wartość liczby d_i i obliczenia kontynuujemy. Przedstawiony sposób umożliwia obliczenie najmniejszej wspólnej wielokrotności według następującego wzoru: **[m, n] = m w.**

W przypadku trzech liczb naturalnych m, n, q wyznaczanie NWW [m, n, q] odbywa się w sposób sekwencyjny [[m, n], q]. Wyznaczamy [m, n] = p i dalej [q, p]. Stąd

[m, n, q] = [q, p] .

W tym przypadku wyznaczamy nowe k_1. Wtedy k_1 oznacza całkowitą wielokrotność liczby p w q. Dalsze wyznaczanie NWW dla [q, p] jest analogiczne jak dla NWW [n, m]

Przy wyznaczaniu złożoności półgrupy charakterystycznej sumy prostej automatu z klasy $DFASC_2$ i EXT $DFASC_2$ wykorzystano nowy algorytm na wyznaczanie najmniejszej wspólnej wielokrotności liczb naturalnych przedstawiony w [6, 8, 10, 11, 13]. W pracach

[10, 11, 13] przeprowadzono formalny dowód. W pracy [13] pokazano także

odpowiednią interpretacje graficzną przedstawiono także programy języku BASIC , PASCAL i C^{++} wraz wizualizacją i praktyczną realizacją.

4. Złożoność półgrupy charakterystycznej sumy prostej automatów asynchronicznych silnie spójnych i ustalonych analogów ich rozszerzeń

4.1. Złożoność półgrupy charakterystycznej sumy prostej automatów z klasy $DFASC_2$ [14]

Twierdzenie 1.
Niech $A \cup B = \left({}^{(A\cup B)}S, \Sigma, {}^{(A\cup B)}M \right)$ będzie sumą prostą automatów $A = \left({}^{A}S, \Sigma, {}^{A}M \right)$ i $B = \left({}^{B}S, \Sigma, {}^{B}M \right)$ z $DFASC_2$; wtedy półgrupa charakterystyczna $\overline{I(A \cup B)}$ sumy prostej automatów $A \cup B$ ma własność:

$$card\left(\overline{I(A \cup B)}\right) = 2\,[m,n] \tag{1}$$

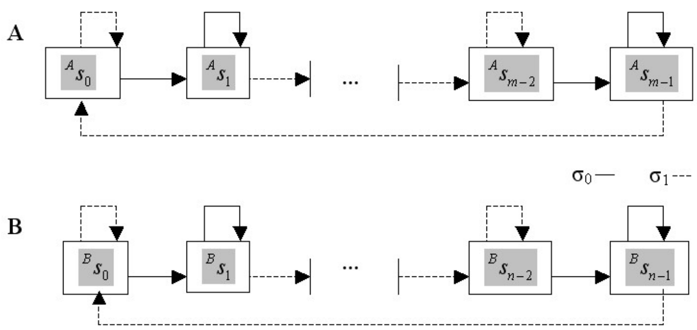
gdzie: card$\left({}^{A}S\right)$ = m >2, card$\left({}^{B}S\right)$ = n>2,

m, n liczby naturalne, m > n.; $card(\Sigma)$ = 2; $x_0 = \sigma_0\sigma_1$; $x_1 = \sigma_1\sigma_0$;

$k_0 = \dfrac{(m - d_0)}{n}$, gdzie d_0 – reszta z dzielenia liczb m, n; $b_0 = n - d_0$;

[m, n] – najmniejsza wspólna wielokrotność liczb m, n.

Dowód.



Rys. 4. Automaty A i B z klasy $DFASC_2$

Niech: ${}^{A}S = \left\{ {}^{A}s_0\ {}^{A}s_1, \ldots, {}^{A}s_{m-2}\ {}^{A}s_{m-1} \right\}$, ${}^{B}S = \left\{ {}^{B}s_0\ {}^{B}s_1, \ldots, {}^{B}s_{n-2}\ {}^{B}s_{n-1} \right\}$.

Wiadomo że suma prosta zbioru stanów automatu A i B wynosi:

$${}^{(A\cup B)}S = \{\ {}^{A}s^0_0, {}^{A}s^0_1, \ldots, {}^{A}s^0_{m-2}, {}^{A}s^0_{m-1}, \ {}^{B}s^0_0, {}^{B}s^0_1, \ldots, {}^{B}s^0_{n-2}, {}^{B}s^0_{n-1}\ \}$$

Po przekształceniu zbioru ${}^{(A\cup B)}S = {}^{A}S \cup {}^{B}S$ pod wpływem litery σ_0 otrzymujemy:

$${}^{(A\cup B)}f_{\sigma_0} = \left({}^{A}s_1\ {}^{A}s_1, \ldots, {}^{A}s_{m-1}\ {}^{A}s_{m-1}\ {}^{B}s_1\ {}^{B}s_1, \ldots, {}^{B}s_{n-1}\ {}^{B}s_{n-1} \right)$$

Pod wpływem słowa x_0 otrzymujemy przekształcenie:

$${}^{(A\cup B)}f_{x_0} = \left({}^{A}s_2\ {}^{A}s_2, \ldots, {}^{A}s_0\ {}^{A}s_0\ {}^{B}s_2\ {}^{B}s_2, \ldots, {}^{B}s_0\ {}^{B}s_0 \right)$$

Po n/2 krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy następujące przekształcenie:

$${}^{(A\cup B)}f_{x_0^{n-2}} = \left({}^{A}s_{\left(\frac{m-d_0}{k_0}\right)}\ {}^{A}s_{\left(\frac{m-d_0}{k_0}\right)}, \ldots, {}^{A}s_{\left(\frac{m-d_0}{k_0}-2\right)}\ {}^{A}s_{\frac{m-d_0}{k_0}-2}\ {}^{B}s_0\ {}^{B}s_0, \ldots, {}^{B}s_{n-2}\ {}^{B}s_{n-2} \right)$$

gdzie: zgodnie ze sposobem wyznaczania [m, n] mamy:

$d_0 = m - k_0 n$; $b_0 = n - d_0$;

k_0 – całkowita wielokrotność liczby n, m; m > n

$d_1 = m - b_0 - k_0 n$; $b_1 = n - d_1$

.

.

.

$d_{w-2} = m - b_{w-3} - k_0 n$; $b_{w-2} = n - d_{w-2}$

$d_{w-1} = m - b_{w-2} - k_0 n = 0$

Wedy [m, n] = m w = p

Po $k_0 \frac{n}{2}$ krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$^{(A\cup B)}f_{x_0^{k_0\frac{n}{2}}} = \left({}^A s_{m-d_0} \, {}^A s_{m-d_0}, \ldots, {}^A s_{m-d_0-2} \, {}^A s_{m-d_0} \; {}^B s_0 \, {}^B s_0, \ldots, {}^B s_{n-2} \, {}^B s_{n-2} \right)$$

Po $k_0 n$ – krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy*:*

$$^{(A\cup B)}f_{x_0^{k_0 n}} = \left({}^A s_{m-d_1} \, {}^A s_{m-d_1}, \ldots, {}^A s_{m-d_1-2} \, {}^A s_{m-d_1-2} \, {}^B s_0 \, {}^B s_0, \ldots, {}^B s_{n-2} \, {}^B s_{n-2} \right)$$

gdzie zgodnie ze sposobem wyznaczania $[m,n]$:

$d_1 = m - b_0 - k_0\, n$; $\quad b_1 = n - d_1$

Po $\frac{wm}{2} = \frac{[m,n]}{2}$ krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$^{(A\cup B)}f_{x_0^{\frac{wm}{2}}} = \left({}^A s_{m-d_w-1} \, {}^A s_{m-d_w-1}, \ldots, {}^A s_{m-d_{w-1}-2} \, {}^A s_{m-d_{w-1}-2} \, {}^B s_0 \, {}^B s_0, \ldots, {}^B s_{n-2} \, {}^B s_{n-2} \right)$$

gdzie zgodnie ze sposobem wyznaczania $[m,n]$:

$d_{w-1} = m - b_{w-2} - k_0 n = 0$

$[m,n] = mw = p$

Stąd: $^{(A\cup B)}f_{x_0^{\frac{wm}{2}}} = \left({}^A s_0 \, {}^A s_0, \ldots, {}^A s_{m-2} \, {}^A s_{m-2} \, {}^B s_0 \, {}^B s_0, \ldots, {}^B s_{n-2} \, {}^B s_{n-2} \right)$

Czyli $^{(A\cup B)}f_{x_0^{\frac{[m,n]}{2}}} = \left({}^A s_0 \, {}^A s_0, \ldots, {}^A s_{m-2} \, {}^A s_{m-2} \, {}^B s_0 \, {}^B s_0, \ldots, {}^B s_{n-2} \, {}^B s_{n-2} \right)$

Po $x_0^{\frac{[m,n]}{2}} \sigma_0$ krotnej konkatenacji otrzymujemy:

$$^{(A\cup B)}f_{x_0^{\frac{[m,n]}{2}}\sigma_0} = \left({}^A s_1 \, {}^A s_1, \ldots, {}^A s_{m-1} \, {}^A s_{m-1} \, {}^B s_1 \, {}^B s_1, \ldots, {}^B s_{n-1} \, {}^B s_{n-1} \right) = {}^{(A\cup B)}f_{\sigma_0}$$

Analogiczne przekształcenia uzyskujemy pod wpływem $\frac{wm}{2} = \frac{[m,n]}{2}$ krotnej konkatenacji słowa $x_1 = \sigma_1\sigma_2$ .Wtedy otrzymujemy wzór (1)

C.B.D.O.

4.2. Złożoność półgrupy charakterystycznej sumy prostej automatów z klasy EXT DFASC$_2$ [15]

Twierdzenie 2.

Niech $ext_q(A \cup B) = \left({}^{ext_q(A\cup B)}S, \Sigma, {}^{ext_q(A\cup B)}M \right)$ będzie rozszerzeniem stanowym związanymi izomorfizmami $g_0, g_1, \ldots, g^{q-1}$ sumy prostej $A \cup B = \left({}^{A\cup B}S\, \Sigma, {}^{A\cup B}M \right)$ automatów $A = \left({}^A S, \Sigma, {}^B M \right)$i $B = \left({}^B S, \Sigma, {}^B M \right)$ z DFASC$_2$ takimi, że:

card(^{A}S) = m >2, card(^{B}S) = n >2, $card(\Sigma)$=2, $x_0 = \sigma_0\sigma_1$, $x_1 = \sigma_1\sigma_0$; wtedy półgrupa charakterystyczna $\overline{I\left(ext_q(A \cup B)\right)^*}$ ustalonego analogu rozszerzenia ma własność:

$$card\left(\overline{I\left(ext_q\left(A \cup B\right)\right)^*}\right) = 2[m,n,q] \times q \qquad (2)$$

Dowód.

Na rys.5 przedstawiono ustalone analogi ((ext$_q$(A))* i ((ext$_q$(B))* automatów A i B.

Niech:

$$^{ext_q A}S = \left\{ {}^A s_0^0, {}^A s_1^0, \ldots, {}^A s_{m-2}^0, {}^A s_{m-1}^0, \ldots, {}^A s_0^{q-1}, {}^A s_1^{q-1}, \ldots, {}^A s_{m-2}^{q-1}, {}^A s_{m-1}^{q-1} \right\},$$

$$^{ext_q B}S = \left\{ {}^B s_0^0, {}^B s_1^0, \ldots, {}^B s_{n-2}^0, {}^B s_{n-1}^0, \ldots, {}^B s_0^{q-1}, {}^B s_1^{q-1}, \ldots, {}^B s_{n-2}^{q-1}, {}^B s_{n-1}^{q-1} \right\}.$$

Wiadomo, że:

$$^{ext_q(A\cup B)}S = \{ {}^A s_0^0, {}^A s_1^0, \ldots, {}^A s_{m-2}^0, {}^A s_{m-1}^0, \ldots, {}^A s_0^{q-1}, {}^A s_1^{q-1}, \ldots, {}^A s_{m-2}^{q-1}, {}^A s_{m-1}^{q-1},$$
$$ {}^B s_0^0, {}^B s_1^0, \ldots, {}^B s_{n-2}^0, {}^B s_{n-1}^0, \ldots, {}^B s_0^{q-1}, {}^B s_1^{q-1}, \ldots, {}^B s_{n-2}^{q-1}, {}^B s_{n-1}^{q-1} \}$$

Po przekształceniu zbioru stanów ${}^{ext_q(A\cup B)}S$ rozszerzenia stanowego sumy prostej automatów A i B pod wpływem litery σ_0 otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
{}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0} = (\; & {}^{A}s_1^1, {}^{A}s_1^1, \ldots, {}^{A}s_{m-1}^1, {}^{A}s_{m-1}^1, \ldots, {}^{A}s_1^0, {}^{A}s_1^0, \ldots, {}^{A}s_{m-1}^0, {}^{A}s_{m-1}^0, \\
& {}^{B}s_1^1, {}^{B}s_1^0, \ldots, {}^{B}s_{n-1}^1, {}^{B}s_{n-1}^1, \ldots, {}^{B}s_1^0, {}^{B}s_1^0, \ldots, {}^{B}s_{n-1}^0, {}^{B}s_{n-1}^0 \;)
\end{aligned}
$$

Po $\sigma_0\sigma_0$ – krotnej konkatenacji litery σ_0 otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
{}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0\sigma_0} = (\; & {}^{A}s_1^2, {}^{A}s_1^2, \ldots, {}^{A}s_{m-1}^2, {}^{A}s_{m-1}^2, \ldots, {}^{A}s_1^1, {}^{A}s_1^1, \ldots, {}^{A}s_{m-1}^1, {}^{A}s_{m-1}^1, \\
& {}^{B}s_1^2, {}^{B}s_1^2, \ldots, {}^{B}s_{n-1}^2, {}^{B}s_{n-1}^2, \ldots, {}^{B}s_1^1, {}^{B}s_1^1, \ldots, {}^{B}s_{n-1}^1, {}^{B}s_{n-1}^1 \;)
\end{aligned}
$$

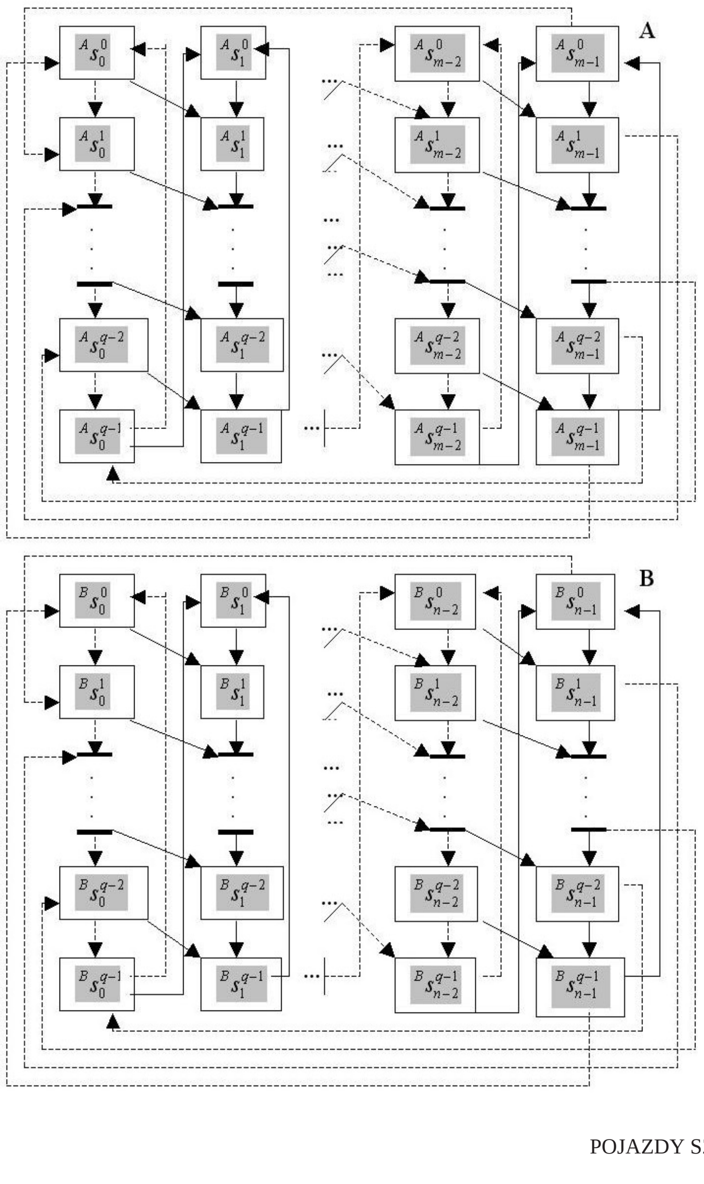
Po q – krotnej konkatenacji litery σ_0 otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
{}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^q} = (\; & {}^{A}s_1^0, {}^{A}s_1^0, \ldots, {}^{A}s_{m-1}^0, {}^{A}s_{m-1}^0, \ldots, {}^{A}s_1^{q-1}, {}^{A}s_1^{q-1}, \ldots, {}^{A}s_{m-1}^{q-1}, {}^{A}s_{m-1}^{q-1}, \\
& {}^{B}s_1^0, {}^{B}s_1^0, \ldots, {}^{B}s_{n-1}^0, {}^{B}s_{n-1}^0, \ldots, {}^{B}s_1^{q-1}, {}^{B}s_1^{q-1}, \ldots, {}^{B}s_{n-1}^{q-1}, {}^{B}s_{n-1}^{q-1} \;)
\end{aligned}
$$

Po $(q+1)$ – krotnej konkatenacji litery σ_0 otrzymujemy:

$$
{}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{q+1}} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0}
$$

Dla przekształcenia ${}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0}$ pod wpływem q – krotnego działania litery σ_0 otrzymujemy ponownie przekształcenia ${}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0}$. W dalszych rozważaniach będziemy analizować przekształcenia ${}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0}$. Rozważania dla przekształceń ${}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0\sigma_0}, \ldots, {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^q}$ są analogiczne.



Rys. 5 Ustalone analogi $((ext_q(A))^*$ i $((ext_q(B))^*$ automatów A i B

$$ {}^{ext_q(A\cup B)}f_{x_0} = \left({}^{A}s_2^2, {}^{A}s_2^2, \ldots, {}^{A}s_0^2, {}^{A}s_0^2, \ldots, {}^{A}s_2^1, {}^{A}s_2^1, \ldots, {}^{A}s_0^1, {}^{A}s_0^1, \right. $$
$$ \left. {}^{B}s_2^2, {}^{B}s_2^2, \ldots, {}^{B}s_0^2, {}^{B}s_0^2, \ldots, {}^{B}s_2^1, {}^{B}s_2^1, \ldots, {}^{B}s_0^1, {}^{B}s_0^1 \right) $$

Po $\frac{n}{2}$ krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$ {}^{ext_q(A\cup B)}f_{x_0^{n-2}} = $$
$$ \begin{pmatrix} {}^{A}s^{n}_{\frac{m-d_0}{k_0}} & {}^{A}s^{n}_{\frac{m-d_0}{k_0}}, \ldots, {}^{A}s^{n}_{\frac{m-d_0}{k_0}-2} & {}^{A}s^{n}_{\frac{m-d_0}{k_0}-2}, \ldots, {}^{A}s^{n-1}_{\frac{m-d_0}{k_0}} & {}^{A}s^{n-1}_{\frac{m-d_0}{k_0}}, \ldots, {}^{A}s^{n-1}_{\frac{m-d_0}{k_0}-2} & {}^{A}s^{n-1}_{\frac{m-d_0}{k_0}-2} \\ {}^{B}s_0^n & {}^{B}s_0^n, \ldots, {}^{B}s_{n-2}^n & {}^{B}s_{n-2}^n, \ldots, {}^{B}s_0^{n-1} & {}^{B}s_0^{n-1}, \ldots, {}^{B}s_{n-2}^{n-1} & {}^{B}s_{n-2}^{n-1} \end{pmatrix} $$

gdzie zgodnie ze sposobem wyznaczania[m, n]:

$d_0 = m - k_0 n$; $\quad b_0 = n - d_0$;

k_0 – całkowita wielokrotność liczby n, m; $m > n$

$d_1 = m - b_0 - k_0 n$; $\quad b_1 = n - d_1$

.

.

.

$d_{w-2} = m - b_{w-3} - k_0 n$; $\quad b_{w-2} = n - d_{w-2}$

$d_{w-1} = m - b_{w-2} - k_0 n = 0$

Wtedy [m, n] = m w = p

W przypadku gdy $d_x < 0$; gdzie $0 < x < w-1$, to w miejsce b_x wpisujemy bezwzględna wartość liczby d_x i obliczenia kontynuujemy dalej.

Gdy $n > m$ to $d_0 = n - k_0 m$, $b_0 = m - d_0$ i dalej postępujemy analogicznie.

Dowód przeprowadzamy zakładając, że $m > n$.

Po $\frac{n}{2}k_0$ krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$ {}^{ext_q(A\cup B)}f_{x_0^{\frac{n}{2}k_0}} = \begin{pmatrix} {}^{A}s^{nk_0}_{m-d_0} & {}^{A}s^{nk_0}_{m-d_0}, \ldots, {}^{A}s^{nk_0}_{m-d_0-2} & {}^{A}s^{nk_0}_{m-d_0-2}, \ldots, {}^{A}s^{nk_0-1}_{m-d_0} & {}^{A}s^{nk_0-1}_{m-d_0}, \ldots, {}^{A}s^{nk_0-1}_{m-d_0-2} & {}^{A}s^{nk_0-1}_{m-d_0-2} \\ {}^{B}s_0^{nk_0} & {}^{B}s_0^{nk_0}, \ldots, {}^{B}s_{n-2}^{nk_0} & {}^{B}s_{n-2}^{nk_0}, \ldots, {}^{B}s_0^{nk_0-1} & {}^{B}s_0^{nk_0-1}, \ldots {}^{B}s_{n-2}^{nk_0-1} & {}^{B}s_{n-2}^{nk_0-1} \end{pmatrix} $$

Po k_0 n – krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$ {}^{ext_q A\cup B}f_{x_0^{k_0 n}} = $$
$$ \begin{pmatrix} {}^{A}s^{2k_0n}_{m-d_1} & {}^{A}s^{2k_0n}_{m-d_1}, \ldots, {}^{A}s^{2k_0n}_{m-d_1-2} & {}^{A}s^{2k_0n}_{m-d_1-2}, \ldots, {}^{A}s^{2k_0n-1}_{m-d_1} & {}^{A}s^{2nk_0}_{m-d_1}, \ldots, {}^{A}s^{2nk_0}_{m-d_1-2} & {}^{A}s^{2nk_0}_{m-d_1-2} \\ {}^{B}s_0^{2k_0n} & {}^{B}s_0^{2k_0n}, \ldots, {}^{B}s_{n-2}^{2k_0n} & {}^{B}s_{n-2}^{2k_0n}, \ldots, {}^{B}s_0^{2k_0n-1} & {}^{B}s_0^{2k_0n-1}, \ldots, {}^{B}s_{n-2}^{2k_0n-1} & {}^{B}s_{n-2}^{2k_0n-1} \end{pmatrix} $$

gdzie zgodnie ze sposobem wyznaczania $[m,n]$:

$d_1 = m - b_0 - k_0 n$; $\quad b_1 = n - d_1$

Po $\frac{wm}{2} = \frac{[m,n]}{2}$ – krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$ {}^{ext_q(A\cup B)}f_{x_0^{\frac{wm}{2}}} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{x_0^{\frac{[m,n]}{2}}} = $$
$$ \begin{pmatrix} {}^{A}s^{wm}_{m-d_{w-1}} & {}^{A}s^{wm}_{m-d_{w-1}}, \ldots, {}^{A}s^{wm}_{m-d_{w-1}-2} & {}^{A}s^{wm}_{m-d_{w-1}-2}, \ldots, {}^{A}s^{wm-1}_{m-d_{w-1}} & {}^{A}s^{wm-1}_{m-d_{w-1}}, \ldots, {}^{A}s^{wm-1}_{m-d_{w-1}-2} \\ {}^{A}s^{wm-1}_{m-d_{w-1}-2} & {}^{B}s_0^{wm} \quad {}^{B}s_0^{wm}, \ldots, {}^{B}s_{n-2}^{wm} & {}^{B}s_{n-2}^{wm}, \ldots, {}^{B}s_0^{wm-1} & {}^{B}s_0^{wm-1}, \ldots, {}^{B}s_{n-2}^{wm-1} \quad {}^{B}s_{n-2}^{wm-1} \end{pmatrix} $$

gdzie zgodnie ze sposobem wyznaczania [m, n]:

$d_{w-1} = m - b_{w-2} - k_0 n = 0$; $\quad [m, n] = w\,m = p$.

Dla $d_{w-1} = 0$ możemy napisać przekształcenie ${}^{ext_q(A\cup B)}f_{x_0^{\frac{wm}{2}}}$ w następujący sposób:

$$ {}^{ext_q(A\cup B)}f_{x_0^{\frac{wm}{2}}} = \begin{pmatrix} {}^A s_0^{wm}\ {}^A s_0^{wm},\ldots,{}^A s_{m-2}^{wm}\ {}^A s_{m-2}^{wm},\ldots,{}^A s_0^{wm-1}\ {}^A s_0^{wm-1},\ldots,{}^A s_{m-2}^{wm-1}\ {}^A s_{m-2}^{wm-1} \\ {}^B s_0^{wm}\ {}^B s_0^{wm},\ldots,{}^B s_{n-2}^{wm}\ {}^B s_{n-2}^{wm},\ldots,{}^B s_0^{wm-1}\ {}^B s_0^{wm-1},\ldots,{}^B s_{n-2}^{wm-1}\ {}^B s_{n-2}^{wm-1} \end{pmatrix} $$

Po σ_0 i $\frac{wm}{2} = \frac{[m,n]}{2}$ – krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$ {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0 x_0^{\frac{wm}{2}}} = \begin{pmatrix} {}^A s_1^{wm+1}\ {}^A s_1^{wm+1},\ldots,{}^A s_{m-1}^{wm+1}\ {}^A s_{m-1}^{wm+1},\ldots,{}^A s_1^{wm}\ {}^A s_1^{wm},\ldots,{}^A s_{m-1}^{wm}\ {}^A s_{m-1}^{wm} \\ {}^B s_1^{wm+1}\ {}^B s_1^{wm+1},\ldots,{}^B s_{n-1}^{wm+1}\ {}^B s_{n-1}^{wm+1},\ldots,{}^B s_1^{wm}\ {}^B s_1^{wm},\ldots,{}^B s_{n-1}^{wm}\ {}^B s_{n-1}^{wm} \end{pmatrix} $$

Po σ_0^q i $\frac{wm}{2}$ krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$ {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^q x_0^{\frac{wm}{2}}} = \begin{pmatrix} {}^A s_1^{wm}\ {}^A s_1^{wm},\ldots,{}^A s_{m-1}^{wm}\ {}^A s_{m-1}^{wm},\ldots,{}^A s_1^{wm-1}\ {}^A s_1^{wm-1},\ldots,{}^A s_{m-1}^{wm-1}\ {}^A s_{m-1}^{wm-1} \\ {}^B s_1^{wm}\ s_1^{wm},\ldots,s_{n-1}^{wm}\ s_{n-11}^{wm},\ldots,s_1^{wm-1}\ s_1^{wm-1},\ldots,s_{n-1}^{wm-1}\ s_{n-1}^{wm-1} \end{pmatrix} $$

Po σ_0^{q+1} i $\frac{wm}{2}$ krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$ {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{q+1} x_0^{\frac{wm}{2}}} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^q x_0^{\frac{wm}{2}}} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^q x_0^{\frac{[m,n]}{2}}} $$

Dla przekształcenia ${}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0 x_0^{\frac{wm}{2}}}$ pod wpływem q – krotnego działania litery σ_0 otrzymujemy ponownie przekształcenie ${}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0 x_0^{\frac{wm}{2}}} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0 x_0^{\frac{[m,n]}{2}}}$.

W dalszych rozważaniach będziemy analizować przekształcenie ${}^{ext_q(A\cup B)}f_{x_0^{\frac{wm}{2}}}$. Rozważania dla przekształceń ${}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0 x_0^{\frac{wm}{2}}},\ldots,{}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^q x_0^{\frac{wm}{2}}}$ są analogiczne.

Z przytoczonych powyżej rozważań opartych na sposobie wyznaczania najmniejszej wspólnej wielokrotności dwóch liczb oraz uwzględniając definicję rozszerzenia stanowego automatu z klasy $DFASC_2$ wynika, że liczba dotychczas wygenerowanych przekształceń wynosi $q[m,n]$. Dla [m, n] = m w = p.

Po $\frac{p}{2}$ – krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$ {}^{ext_q(A\cup B)}f_{x_0^{\frac{p}{2}}} = $$

$$ \begin{pmatrix} {}^A s_0^{\frac{q-d_{0,0}}{k_1}}\ {}^A s_0^{\frac{q-d_{0,0}}{k_1}},\ldots,{}^A s_{m-2}^{\frac{q-d_{0,0}}{k_1}}\ {}^A s_{m-2}^{\frac{q-d_{0,0}}{k_1}},\ldots,{}^A s_0^{\frac{q-d_{0,0}}{k_1}-1}\ {}^A s_0^{\frac{q-d_{0,0}}{k_1}-1},\ldots,{}^A s_{m-2}^{\frac{q-d_{0,0}}{k_1}-1}\ {}^A s_0^{\frac{q-d_{0,0}}{k_1-1}-1} \\ {}^B s_0^{\frac{q-d_{0,0}}{k_1}}\ {}^B s_0^{\frac{q-d_{0,0}}{k_1}},\ldots,{}^B s_{n-2}^{\frac{q-d_{0,0}}{k_1}}\ {}^B s_{n-2}^{\frac{q-d_{0,0}}{k_1}},\ldots,{}^B s_0^{\frac{q-d_{0,0}}{k_1}-1}\ {}^B s_0^{\frac{q-d_{0,0}}{k_1}-1},\ldots{}^B s_{n-2}^{\frac{q-d_{0,0}}{k_1}-1}\ {}^B s_{n-2}^{\frac{q-d_{0,0}}{k_1}-1} \end{pmatrix} $$

gdzie zgodnie z nowym sposobem wyznaczania najmniejszej wspólnej wielokrotności dla trzech liczb [m, n, q] = [[m, n], q] = [p, q], gdzie: p = [m, n]. W tym przypadku wyznaczamy nowe k_1.

k_1 – całkowita wielokrotność liczby p w q; q > p

$d_{0,0} = q - k_1 p$; $b_{0,0} = p - d_{0,0}$,

$d_{1,1} = q - b_{0,0} - k_1 p$; $b_{1,1} = p - d_{1,1}$

.

.

.

$d_{t-2,t-2} = q - b_{t-3,t-3} - k_1 p$; $b_{t-2,t-2} = p - d_{t-2,t-2}$

$d_{t-1,t-1} = q - b_{t-2,t-2} - k_1 p = 0$

[m, n, q] = [p, q] =[[m, n], q] = q t
W przypadku gdy $d_x < 0$; gdzie $0 < x < t-1$, to w miejsce b_x wpisujemy bezwzględna wartość liczby d_x i obliczenia kontynuujemy dalej.
Gdy $p > q$ to $d_{0,0} = p - k_1 q$, $b_0 = q - d_{0,0}$ i dalej postępujemy analogicznie.
Dowód przeprowadzamy zakładając, że $q > p$.

Po $\frac{p}{2}k_1$ – krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$^{ext_q(A\cup B)}f_{x_0^{\frac{p}{2}k_1}} =$$

$$\begin{pmatrix} {}^A s_0^{q-d_{0,0}} & {}^A s_0^{q-d_{0,0}},\ldots, & {}^A s_{m-2}^{q-d_{0,0}} & {}^A s_{m-2}^{q-d_{0,0}},\ldots, & {}^A s_0^{q-d_{0,0}-1} & {}^A s_0^{q-d_{0,0}-1},\ldots & {}^A s_{m-2}^{q-d_{0,0}-1} & {}^A s_{m-2}^{q-d_{0,0}-1} \\ {}^B s_0^{q-d_{0,0}} & {}^B s_0^{q-d_{0,0}},\ldots, & {}^B s_{n-2}^{q-d_{0,0}} & {}^B s_{n-2}^{q-d_{0,0}},\ldots, & {}^B s_0^{q-d_{0,0}-1} & {}^B s_0^{q-d_{0,0}-1},\ldots & {}^B s_{n-2}^{q-d_{0,0}-1} & {}^B s_{n-2}^{q-d_{0,0}-1} \end{pmatrix}$$

Po pk_1 - krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$^{ext_q(A\cup B)}f_{x_0^{pk_1}} =$$

$$\begin{pmatrix} {}^A s_0^{q-d_{1,1}} & {}^A s_0^{q-d_{1,1}},\ldots, & {}^A s_{m-2}^{q-d_{1,1}} & {}^A s_{m-2}^{q-d_{1,1}},\ldots, & {}^A s_0^{q-d_{1,1}-1} & {}^A s_0^{q-d_{1,1}-1},\ldots & {}^A s_{m-2}^{q-d_{1,1}-1} & {}^A s_{m-2}^{q-d_{1,1}-1} \\ {}^B s_0^{q-d_{1,1}} & {}^B s_0^{q-d_{1,1}},\ldots, & {}^B s_{n-2}^{q-d_{1,1}} & {}^B s_{n-2}^{q-d_{1,1}},\ldots, & {}^B s_0^{q-d_{1-1}-1} & {}^B s_0^{q-d_{1,1}-1},\ldots & {}^B s_{n-2}^{q-d_{1,1}-1} & {}^B s_{n-2}^{q-d_{1,1}-1} \end{pmatrix}$$

gdzie: zgodnie ze sposobem wyznaczania [m, n, q] = [[m, n], q] = [p, q]:
$d_{1,1} = q - b_{0,0} - k_1 p$; $b_{1,1} = p - d_{1,1}$

Po $\frac{qt}{2}$ – krotnej konkatenacji słowa x_o otrzymujemy:

$$^{ext_q(A\cup B)}f_{x_0^{\frac{qt}{2}}} =$$

$$\begin{pmatrix} {}^A s_0^{q-d_{t-1,t-1}} \; {}^A s_0^{q-d_{t-1,t-1}},\ldots, {}^A s_{m-2}^{q-d_{t-1,t-1}} \; {}^A s_{m-2}^{q-d_{t-1,t-1}},\ldots, {}^A s_0^{q-d_{t-1,t-1}-1} \; {}^A s_0^{q-d_{t-1,t-1}-1},\ldots, \\ {}^A s_{m-2}^{q-d_{t-1,t-1}-1} \; {}^A s_{m-2}^{q-d_{1,t-1,t-1}-1} \; {}^B s_0^{q-d_{t-1,t-1}} \; {}^B s_0^{q-d_{t-1,t-1}},\ldots, {}^B s_{n-2}^{q-d_{t-1,t-1}} \; {}^B s_{n-2}^{q-d_{t-1,t-1}},\ldots, \\ {}^B s_0^{q-d_{t-1,t-1}-1} \; {}^B s_0^{q-d_{t-1,t-1}-1},\ldots, {}^B s_{n-2}^{q-d_{t-1,t-1}-1} \; {}^B s_{n-2}^{q-d_{t-1,t-1}-1} \end{pmatrix}$$

gdzie zgodnie ze sposobem wyznaczania[m, n, q]:
$d_{t-1,t-1} = q - b_{t-2,t-2} - kp = 0$
Dla $d_{t-1,\,t-1} = 0$ możemy napisać przekształcenie $^{ext_q(A\cup B)}f_{x_0^{\frac{qt}{2}}}$ w następującej postaci:

$$^{ext_q(A\cup B)}f_{x_0^{\frac{qt}{2}}} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{x_0^{\frac{[m,n,q]}{2}}} = \begin{pmatrix} {}^A s_0^0 & {}^A s_0^0,\ldots, & {}^A s_{m-2}^0 & {}^A s_{m-2}^0,\ldots, & {}^A s_0^{q-1} & {}^A s_0^{q-1},\ldots, & {}^A s_{m-2}^{q-1} & {}^A s_{m-2}^{q-1} \\ {}^B s_0^0 & {}^B s_0^0,\ldots, & {}^B s_{n-2}^0 & {}^B s_{n-2}^0,\ldots, & {}^B s_0^{q-1} & {}^B s_0^{q-1},\ldots, & {}^B s_{n-2}^{q-1} & {}^B s_{n-2}^{q-1} \end{pmatrix}$$

Po σ_0 i $\frac{qt}{2} = \frac{[m,n,q]}{2}$ – krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0 x_0^{\frac{qt}{2}}} = \begin{pmatrix} {}^A s_1^1 & {}^A s_1^1,\ldots, & {}^A s_{m-1}^1 & {}^A s_{m-1}^1,\ldots, & {}^A s_1^0 & {}^A s_1^0,\ldots, & {}^A s_{m-1}^0 & {}^A s_{m-1}^0 \\ {}^B s_1^1 & {}^B s_1^1,\ldots, & {}^B s_{n-1}^1 & {}^B s_{n-1}^1,\ldots, & {}^B s_1^0 & {}^B s_1^0,\ldots, & {}^B s_{n-1}^0 & {}^B s_{n-1}^0 \end{pmatrix}$$

Po σ_0^q i $\frac{qt}{2} = \frac{[m,n,q]}{2}$ – krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy

$$^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^q x_0^{\frac{qt}{2}}} = \begin{pmatrix} {}^A s_1^0 & {}^A s_1^0,\ldots, & {}^A s_{m-1}^1 & {}^A s_{m-1}^1,\ldots, & {}^A s_1^{q-1} & {}^A s_1^{q-1},\ldots, & {}^A s_{m-1}^{q-1} & {}^A s_{m-1}^{q-1} \\ {}^B s_1^0 & {}^B s_1^0,\ldots, & {}^B s_{n-1}^{01} & {}^B s_{n-1}^0,\ldots, & {}^B s_1^{q-1} & {}^B s_1^{q-1},\ldots, & {}^B s_{n-1}^{q-1} & {}^B s_{n-1}^{q-1} \end{pmatrix}$$

czyli:

$$^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^q x_0^{\frac{[m,n,q]}{2}}} = \begin{pmatrix} {}^A s_1^0 \; {}^A s_1^0,\ldots, {}^A s_{m-1}^1 \; {}^A s_{m-1}^1,\ldots, {}^A s_1^{q-1} \; {}^A s_1^{q-1},\ldots, {}^A s_{m-1}^{q-1} \; {}^A s_{m-1}^{q-1} \\ {}^B s_1^0 \; {}^B s_1^0,\ldots, {}^B s_{n-1}^{01} \; {}^B s_{n-1}^0,\ldots, {}^B s_1^{q-1} \; {}^B s_1^{q-1},\ldots, {}^B s_{n-1}^{q-1} \; {}^B s_{n-1}^{q-1} \end{pmatrix}$$

Po σ_0^{q+1} i $\frac{qt}{2}$ – konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{q+1} x_0^{\frac{qt}{2}}} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0 x_0^{\frac{qt}{2}}} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0 x_0^{\frac{[m,n,q]}{2}}} =$$

Z przytoczonych powyżej rozważań opartych na sposobie wyznaczania najmniejszej wspólnej wielokrotności liczba dotychczas wygenerowanych przekształceń wynosi
[m, n, q]. Dla pozostałych przekształceń otrzymujemy:

$$^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0 x_0^{\frac{qt}{2}}} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0\sigma_0}$$

$$\begin{matrix} \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \end{matrix}$$

$$^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^q x_0^{\frac{qt}{2}}} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{q+1}}$$

Stąd liczba wykonywanych przekształceń jest równa [m, n, q]$\times q$ .Identyczną liczbę przekształceń uzyskamy rozpoczynając przekształcenia zbioru stanów $^{ext_q(A\cup B)}S$ rozszerzenia stanowego sumy prostej od litery σ_1 . Zatem otrzymujemy wzór 2.

C.B.D.O.

4.3. Złożoność półgrupy charakterystycznej sumy prostej automatów z klasy EXT DFASC$_2$ dla każdego słowa z języka $\Sigma^+ = (\sigma_0 \cup \sigma_1)^+$

Twierdzenie 3.

Niech $ext_q(A\cup B) = \left({}^{ext_q(A\cup B)}S,\ \Sigma,\ {}^{ext_q(A\cup B)}M\right)$ będzie rozszerzeniem stanowym związanymi z izomorfizmami $g_0, g_1, \ldots, g^{q-1}$ sumy prostej $A\cup B = \left({}^{A\cup B}S\,\Sigma, {}^{A\cup B}M\right)$ automatów $A = \left({}^A S, \Sigma, {}^B M\right)$ i $B = \left({}^B S, \Sigma, {}^B M\right)$ z DFASC$_2$ takimi, że:
card(^{A}S) = m >2, card(^{B}S) = n >2, $card(\Sigma)$=2; q – stopień rozszerzenia; wtedy dla każdego słowa z języka $\Sigma^+ = (\sigma_0 \cup \sigma_1)^+$ półgrupa charakterystyczna $\overline{I\left(ext_q(A\cup B)\ \right)^*}$ ustalonego analogu rozszerzenia ma własność:

$$card\left(\overline{I\left(ext_q(A\cup B\ \ )\ \right)^*}\right) = 2[m,n,q]\times q \tag{3}$$

Dowód.

Rozważmy język $\Sigma^+ = (\sigma_0 \cup \sigma_1)^+$.

Niech $x_{0'} \in \Sigma^+$ słowa rozpoczynające się od litery σ_0

$x_{1'} \in \Sigma^+$ słowa rozpoczynające się do litery σ_1

$$x_{0'} = \left(\sigma_0^k \sigma_1^l \sigma_0^w, \ldots, \sigma_1^p\right)^+; \quad x_{1'} = \left(\sigma_1^k \sigma_0^l \sigma_1^w, \ldots, \sigma_0^p\right)^+ \qquad k, l, w, \ldots, p = 1, 2, \ldots$$

Wtedy:

$$^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0} = \begin{pmatrix} {}^A s_1^1, {}^A s_1^1,\ldots, {}^A s_{m-1}^1, {}^A s_{m-1}^1,\ldots, {}^A s_1^0, {}^A s_1^0,\ldots, {}^A s_{m-1}^0, {}^A s_{m-1}^0, \\ {}^B s_1^1, {}^B s_1^0,\ldots, {}^B s_{n-1}^1, {}^B s_{n-1}^1,\ldots, {}^B s_1^0, {}^B s_1^0,\ldots, {}^B s_{n-1}^0, {}^B s_{n-1}^0 \end{pmatrix}$$

$$
{}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0\sigma_0} = \Big({}^{A}s_1^{2}, {}^{A}s_1^{2}, \ldots, {}^{A}s_{m-1}^{2}, {}^{A}s_{m-1}^{2}, \ldots, {}^{A}s_1^{1}, {}^{A}s_1^{1}, \ldots, {}^{A}s_{m-1}^{1}, {}^{A}s_{m-1}^{1},
$$
$$
{}^{B}s_1^{2}, {}^{B}s_1^{2}, \ldots, {}^{B}s_{n-1}^{2}, {}^{B}s_{n-1}^{2}, \ldots, {}^{B}s_1^{1}, {}^{B}s_1^{1}, \ldots, {}^{B}s_{n-1}^{1}, {}^{B}s_{n-1}^{1} \Big)
$$
$$
{}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^q} = \Big({}^{A}s_1^{0}, {}^{A}s_1^{0}, \ldots, {}^{A}s_{m-1}^{0}, {}^{A}s_{m-1}^{0}, \ldots, {}^{A}s_1^{1}, {}^{A}s_1^{q-1}, \ldots, {}^{A}s_{m-1}^{q-1}, {}^{A}s_{m-1}^{q-1},
$$
$$
{}^{B}s_1^{0}, {}^{B}s_1^{0}, \ldots, {}^{B}s_{n-1}^{0}, {}^{B}s_{n-1}^{0}, \ldots, {}^{B}s_1^{q-1}, {}^{B}s_1^{q-1}, \ldots, {}^{B}s_{n-1}^{q-1}, {}^{B}s_{n-1}^{q-1} \Big)
$$

q – przekształceń

.

.

.

$$
{}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{q+1}} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0}
$$

Dla przekształcenia ${}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0}$ pod wpływem q – krotnego działania litery σ_0 otrzymujemy ponownie przekształcenia ${}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0}$. W dalszych rozważaniach będziemy analizować przekształcenia ${}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0}$. Rozważania dla przekształceń ${}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0\sigma_0}, \ldots, {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^q}$ są analogiczne.

$$
{}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^k} =
$$
$$
\Big({}^{A}s_1^{k(\mathrm{mod}\, q)}, {}^{A}s_1^{k(\mathrm{mod}\, q)}, \ldots, {}^{A}s_{m-1}^{k(\mathrm{mod}\, q)}, {}^{A}s_{m-1}^{k(\mathrm{mod}\, q)}, \ldots, {}^{A}s_1^{(k-1)\mathrm{mod}\, q}, {}^{A}s_1^{(k-1)\mathrm{mod}\, q}, \ldots, {}^{A}s_{m-1}^{(k-1)\mathrm{mod}\, q}, {}^{A}s_{m-1}^{(k-1)\mathrm{mod}\, q},
$$
$$
{}^{B}s_1^{k(\mathrm{mod}\, q)}, {}^{B}s_1^{k(\mathrm{mod}\, q)}, \ldots, {}^{B}s_{n-1}^{k(\mathrm{mod}\, q)}, {}^{B}s_{n-1}^{k(\mathrm{mod}\, q)}, \ldots, {}^{B}s_1^{(k-1)\mathrm{mod}\, q}, {}^{B}s_1^{(k-1)\mathrm{mod}\, q}, \ldots, {}^{B}s_{n-1}^{(k-1)\mathrm{mod}\, q}, {}^{B}s_{n-1}^{(k-1)\mathrm{mod}\, q} \Big)
$$

$$
{}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k+1}} =
$$
$$
\Big({}^{A}s_1^{(k+1)\mathrm{mod}\, q}, {}^{A}s_1^{(k+1)\mathrm{mod}\, q}, \ldots, {}^{A}s_{m-1}^{(k+1)\mathrm{mod}\, q}, {}^{A}s_{m-1}^{(k+1)\mathrm{mod}\, q}, \ldots, {}^{A}s_1^{k(\mathrm{mod}\, q)}, {}^{A}s_1^{k(\mathrm{mod}\, q)}, \ldots, {}^{A}s_{m-1}^{k(\mathrm{mod}\, q)}, {}^{A}s_{m-1}^{k(\mathrm{mod}\, q)},
$$
$$
{}^{B}s_1^{(k+1)\mathrm{mod}\, q}, {}^{B}s_1^{(k+1)\mathrm{mod}\, q}, \ldots, {}^{B}s_{n-1}^{(k+1)\mathrm{mod}\, q}, {}^{B}s_{n-1}^{(k+1)\mathrm{mod}\, q}, \ldots, {}^{B}s_1^{k(\mathrm{mod}\, q)}, {}^{B}s_1^{k(\mathrm{mod}\, q)}, \ldots, {}^{B}s_{n-1}^{k(\mathrm{mod}\, q)}, {}^{B}s_{n-1}^{k(\mathrm{mod}\, q)} \Big)
$$

.

.

.

$$
{}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k+q}} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^k}
$$

q – przekształceń

Dla $\sigma_0^k\sigma_1^l$ otrzymujemy następujące przekształcenia:

$$
{}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^k\sigma_1^l} = \Big(
$$
$$
{}^{A}s_2^{(k+l)\mathrm{mod}\, q}, {}^{A}s_2^{(k+l)\mathrm{mod}\, q}, \ldots, {}^{A}s_0^{(k+l)\mathrm{mod}\, q}, {}^{A}s_0^{(k+l)\mathrm{mod}\, q}, \ldots, {}^{A}s_2^{(k+l-1)\mathrm{mod}\, q}, {}^{A}s_2^{(k+l-1)\mathrm{mod}\, q}, \ldots, {}^{A}s_0^{(k+l-1)\mathrm{mod}\, q}, {}^{A}s_0^{(k+l-1)\mathrm{mod}}
$$
$$
{}^{B}s_2^{(k+l)\mathrm{mod}\, q}, {}^{B}s_2^{(k+l)\mathrm{mod}\, q}, \ldots, {}^{B}s_0^{(k+l)\mathrm{mod}\, q}, {}^{B}s_0^{(k+l)\mathrm{mod}\, q}, \ldots, {}^{B}s_2^{(k+l-1)\mathrm{mod}\, q}, {}^{B}s_2^{(k+l-1)\mathrm{mod}\, q}, \ldots, {}^{B}s_0^{(k+l-1)\mathrm{mod}\, q}, {}^{B}s_0^{(k+l-1)\mathrm{mod}}
$$

$$
{}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k+1}\sigma_1^l} = \Big(
$$
$$
{}^{A}s_2^{(k+1+l)\mathrm{mod}\, q}, {}^{A}s_2^{(k+1+l)\mathrm{mod}\, q}, \ldots, {}^{A}s_0^{(k+1+l)\mathrm{mod}\, q}, {}^{A}s_0^{(k+1+l)\mathrm{mod}\, q}, \ldots, {}^{A}s_2^{(k+l)\mathrm{mod}\, q}, {}^{A}s_2^{(k+l)\mathrm{mod}\, q}, \ldots, {}^{A}s_0^{(k+l)\mathrm{mod}\, q}, {}^{A}s_0^{(k+l)\mathrm{mod}}
$$
$$
{}^{B}s_2^{(k+1+l)\mathrm{mod}\, q}, {}^{B}s_2^{(k+1+l)\mathrm{mod}\, q}, \ldots, {}^{B}s_0^{(k+1+l)\mathrm{mod}\, q}, {}^{B}s_0^{(k+1+l)\mathrm{mod}\, q}, \ldots, {}^{B}s_2^{(k+l)\mathrm{mod}\, q}, {}^{B}s_2^{(k+l)\mathrm{mod}\, q}, \ldots, {}^{B}s_0^{(k+l)\mathrm{mod}\, q}, {}^{B}s_0^{(k+l)\mathrm{mod}}
$$

.

.

$$
{}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^l} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^k\sigma_1^l}
$$
$$
{}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^k\sigma_1^{l+1}} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k+1}\sigma_1^l}
$$

.

.

$$
{}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^k\sigma_1^{l+q}} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^l} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^k\sigma_1^l} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^{l+q}} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{x_0^{\frac{[m,n]}{2}}}
$$

q – przekształceń

Dla $\sigma_0^k \sigma_1^l \sigma_0^w$ otrzymujemy następujące przekształcenia:

$$^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^k\sigma_1^l\sigma_0^w} = \Big({}^{A}S_3^{(k+l+w)\bmod q}, {}^{A}S_3^{(k+l+w)\bmod q}, \ldots, {}^{A}S_1^{(k+l+w)\bmod q}, {}^{A}S_1^{(k+l+w)\bmod q}, \ldots,$$

$${}^{A}S_3^{(k+l+w-1)\bmod q}, {}^{A}S_3^{(k+l+w-1)\bmod q}, \ldots, {}^{A}S_1^{(k+l+w-1)\bmod q}, {}^{A}S_1^{(k+l+w-1)\bmod q}, \ldots, {}^{B}S_3^{(k+l+w)\bmod q}, {}^{B}S_3^{(k+l+w)\bmod q}$$

$$, \ldots, {}^{B}S_1^{(k+l+w)\bmod q}, {}^{B}S_1^{(k+l+w)\bmod q}, \ldots, {}^{B}S_3^{(k+l+w-1)\bmod q}, {}^{B}S_3^{(k+l+w-1)\bmod q}, \ldots, {}^{B}S_1^{(k+l+w-1)\bmod q}, {}^{B}S_1^{(k+l+w-1)\bmod q}$$

$$^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k+1}\sigma_1^l\sigma_0^w} = \Big({}^{A}S_3^{(k+1+l+w)\bmod q}, {}^{A}S_3^{(k+1+l+w)\bmod q}, \ldots, {}^{A}S_1^{(k+1+l+w)\bmod q},$$

$${}^{A}S_1^{(k+1+l+w)\bmod q}, \ldots, {}^{A}S_3^{(k+l+w)\bmod q}, {}^{A}S_3^{(k+l+w)\bmod q}, \ldots, {}^{A}S_1^{(k+l+w)\bmod q}, {}^{A}S_1^{(k+l+w)\bmod q}, \ldots,$$

$${}^{B}S_3^{(k+1+l+w)\bmod q}, {}^{B}S_3^{(k+1+l+w)\bmod q}, \ldots, {}^{B}S_1^{(k+1+l+w)\bmod q}, {}^{B}S_1^{(k+1+l+w)\bmod q}$$

$$, \ldots, {}^{B}S_3^{(k+l+w)\bmod q}, {}^{B}S_3^{(k+l+w)\bmod q}, \ldots, {}^{B}S_1^{(k+l+w)\bmod q}, {}^{B}S_1^{(k+l+w)\bmod q} \Big)$$

.
.
.

$$^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^l\sigma_0^w} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^k\sigma_1^l\sigma_0^w}$$

$$^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^k\sigma_1^{l+1}\sigma_0^w} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k+1}\sigma_1^l\sigma_0^w}$$

.
.
.

$$^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^k\sigma_1^{l+q}\sigma_0^w} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^l\sigma_0^w} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^k\sigma_1^l\sigma_0^w}$$

$$^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^k\sigma_1^l\sigma_0^{w+1}} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k+1}\sigma_1^l\sigma_0^w} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^k\sigma_1^{l+1}\sigma_0^w}$$

.
.
.

$$^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^k\sigma_1^l\sigma_0^{w+q}} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^l\sigma_0^w} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^k\sigma_1^{l+q}\sigma_0^w} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^k\sigma_1^l\sigma_0^w} =$$

$$^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^l\sigma_0^{w+q}} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^{l+q}\sigma_0^w} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^k\sigma_1^{l+q}\sigma_0^{w+q}} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^{l+q}\sigma_0^{w+q}} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{x_0^{\frac{[m,n]}{2}}}$$

q – przekształceń

Dla $\sigma_0^k \sigma_1^l \sigma_0^w, \ldots, \sigma_1^p$ otrzymujemy następujące przekształcenia:

$$^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^k\sigma_1^l\sigma_0^w,\ldots,\sigma_1^p} =$$

$$\Big({}^{A}S_0^{(k+l+w+,\ldots,+p)\bmod q}\ {}^{A}S_0^{(k+l+w+,\ldots,+p)\bmod q}, \ldots, {}^{A}S_{\frac{[m,n,q]}{2}}^{(k+l+w+,\ldots,+p)\bmod q}\ {}^{A}S_{\frac{[m,n,q]}{2}}^{(k+l+w+,\ldots,+p)\bmod q}, \ldots,$$

$${}^{A}S_2^{(k+l+w+,\ldots,+p)\bmod q}\ {}^{A}S_2^{(k+l+w+,\ldots,+p)\bmod q}\ {}^{A}S_0^{(k+l+w+,\ldots,+p-1)\bmod q}\ {}^{A}S_0^{(k+l+w+,\ldots,+p-1)\bmod q}, \ldots, {}^{A}S_{\frac{[m,n,q]}{2}}^{(k+l+w+,\ldots,+p-1)\bmod q}$$

$${}^{A}S_{\frac{[m,n,q]}{2}}^{(k+l+w+,\ldots,+p-1)\bmod q}, \ldots, {}^{A}S_2^{(k+l+w+,\ldots,+p-1)\bmod q}\ {}^{A}S_2^{(k+l+w+,\ldots,+p-1)\bmod q}\ {}^{B}S_0^{(k+l+w+,\ldots,+p)\bmod q}\ {}^{B}S_0^{(k+l+w+,\ldots,+p)\bmod q}$$

$$, \ldots, {}^{B}S_{\frac{[m,n,q]}{2}}^{(k+l+w+,\ldots,+p)\bmod q}\ {}^{B}S_{\frac{[m,n,q]}{2}}^{(k+l+w+,\ldots,+p)\bmod q}\ {}^{B}S_2^{(k+l+w+,\ldots,+p)\bmod q}\ {}^{B}S_2^{(k+l+w+,\ldots,+p)\bmod q}, \ldots,$$

$${}^{B}S_0^{(k+l+w+,\ldots,+p-1)\bmod q}\ {}^{B}S_0^{(k+l+w+,\ldots,+p-1)\bmod q}, \ldots, {}^{B}S_{\frac{[m,n,q]}{2}}^{(k+l+w+,\ldots,+p-1)\bmod q}\ {}^{B}S_{\frac{[m,n,q]}{2}}^{(k+l+w+,\ldots,+p-1)\bmod q}, \ldots,$$

$${}^{B}S_2^{(k+l+w+,\ldots,+p-1)\bmod q}\ {}^{B}S_2^{(k+l+w+,\ldots,+p-1)\bmod q}$$

$$
{}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k+1}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w},\dots,\sigma_1^{p}} =
$$

$$
\left(\begin{array}{l}
A_{S_0}(k+1+l+w+,\dots,+p)\bmod q \;\; A_{S_0}(k+1+l+w+,\dots,+p)\bmod q ,\dots, A_{S_{\frac{[m,n,q]}{2}}}(k+1+l+w+,\dots,+p)\bmod q \;\; A_{S_{\frac{[m,n,q]}{2}}}(k+1+l+w+,\dots,+p)\bmod q ,\dots, \\
A_{S_2}(k+1+l+w+,\dots,+p)\bmod q \;\; A_{S_2}(k+1+l+w+,\dots,+p)\bmod q \;\; A_{S_0}(k+l+w+,\dots,+p)\bmod q \;\; A_{S_0}(k+l+w+,\dots,+p)\bmod q ,\dots, \\
A_{S_{\frac{[m,n,q]}{2}}}(k+l+w+,\dots,+p)\bmod q \;\; A_{S_{\frac{[m,n,q]}{2}}}(k+l+w+,\dots,+p)\bmod q ,\dots, A_{S_2}(k+l+w+,\dots,+p)\bmod q \;\; A_{S_2}(k+l+w+,\dots,+p)\bmod q \;\; B_{S_0}(k+1+l+w+,\dots,+p)\bmod q \\
B_{S_0}(k+1+l+w+,\dots,+p)\bmod q ,\dots, B_{S_{\frac{[m,n,q]}{2}}}(k+1+l+w+,\dots,+p)\bmod q \;\; B_{S_{\frac{[m,n,q]}{2}}}(k+1+l+w+,\dots,+p)\bmod q \;\; B_{S_2}(k+1+l+w+,\dots,+p)\bmod q \\
B_{S_2}(k+1+l+w+,\dots,+p)\bmod q ,\dots, B_{S_0}(k+l+w+,\dots,+p)\bmod q \;\; B_{S_0}(k+l+w+,\dots,+p)\bmod q ,\dots, B_{S_{\frac{[m,n,q]}{2}}}(k+l+w+,\dots,+p)\bmod q \;\; B_{S_{\frac{[m,n,q]}{2}}}(k+l+w+,\dots,+p)\bmod q \\
,\dots, B_{S_2}(k+l+w+,\dots,+p)\bmod q \;\; B_{S_2}(k+l+w+,\dots,+p)\bmod q
\end{array}\right)
$$

•

•

$$
{}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p}} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p}}
$$

$$
{}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l+1}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p}} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k+1}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p}}
$$

•

•

•

$$
{}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l+q}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p}} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p}} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w+q}\dots\sigma_1^{p}} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p}}
$$

$$
{}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w+1}\dots\sigma_1^{p}} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k+1}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p}} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l+1}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p}} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p}}
$$

•

•

•

$$
{}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p}} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l+q}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p}} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w+q}\dots\sigma_1^{p}} = \dots = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p+q}}
$$

•

•

•

$$
{}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k+1}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p}} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l+1}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p}} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w+1}\dots\sigma_1^{p}} = \dots = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p+1}}
$$

•

•

•

$$
{}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p}} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l+q}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p}} = \dots = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w+q}\dots\sigma_1^{p+q}} = \dots =
$$

$$
{}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p+q}} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^{l+q}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p}} = \dots = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w+q}\dots\sigma_1^{p+q}} = \dots =
$$

$$
{}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p+q}} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l+q}\sigma_0^{w+q}\dots\sigma_1^{p}} = \dots = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l+q}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p+q}} = \dots =
$$

$$
{}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w+q}\dots\sigma_1^{p+q}} = \dots = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^{l+q}\sigma_0^{w+q}\dots\sigma_1^{p}} = \dots = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^{l+q}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p+q}} = \dots =
$$

$$
{}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l+q}\sigma_0^{w+q}\dots\sigma_1^{p+q}} = \dots = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w+q}\dots\sigma_1^{p+q}} = \dots = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^{l+q}\sigma_0^{w+q}\dots\sigma_1^{p+q}} =
$$

$$
{}^{ext_q(A\cup B)}f_{x_0^{\frac{[m,n,q]}{2}}}
$$

Dla słowa $\sigma_0^{k}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w},\dots,\sigma_1^{p}\sigma_0$ otrzymujemy przekształcenie, które już poprzednio zostało wygenerowane.

$$
{}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^k\sigma_1^l\sigma_0^w,\dots,\sigma_1^p\sigma_0} = (
$$

$$
{}^{A}s_1^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q}, {}^{A}s_1^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q}, \dots, {}^{A}s_{m-1}^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q}, {}^{A}s_{m-1}^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q}, \dots,
$$

$$
{}^{A}s_1^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}, {}^{A}s_1^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}, \dots, {}^{A}s_{m-1}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}, {}^{A}s_{m-1}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q},
$$

$$
{}^{B}s_1^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q}, {}^{B}s_1^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q}, \dots, {}^{B}s_{n-1}^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q}, {}^{B}s_{n-1}^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q}, \dots,
$$

$$
{}^{B}s_1^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}, {}^{B}s_1^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}, \dots, {}^{B}s_{n-1}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}, {}^{B}s_{n-1}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q})
$$

Jak wynika z powyższych rozważań dla każdego słowa $x_{0'} = \left(\sigma_0^k\sigma_1^l\sigma_0^w,\dots,\sigma_1^p\right)^+$ możemy wygenerować tylko następujące przekształcenia:

[m, n, q]- przekształceń

$$
\left.\begin{bmatrix}
{}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0} & {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0\sigma_1}\cdots & {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0 x_0^{\frac{[m,n,q]}{2}}} \\
{}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^2} & {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^2\sigma_1}\cdots & {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0 x_0^{\frac{[m,n,q]}{2}}} \\
. & & \\
. & & \\
. & & \\
{}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^q} & {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^q\sigma_1}\cdots & {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_0^q x_0^{\frac{[m,n,q]}{2}}}
\end{bmatrix}\right\}
$$

q - przekształceń

Liczba przekształceń wynosi $[m,n,q]\times q$.

Analogicznie dla słowa, $x_{1'} = \left(\sigma_1^k\sigma_0^l\sigma_1^w,\dots,\sigma_0^p\right)^+$ możemy wygenerować tylko następujące przekształcenia

[m, n, q]- przekształceń

$$
\left.\begin{bmatrix}
{}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_1} & {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_1\sigma_0}\cdots & {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_1 x_1^{\frac{[m,n,q]}{2}}} \\
{}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_1^2} & {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_1^2\sigma_0}\cdots & {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_1 x_1^{\frac{[m,n,q]}{2}}} \\
. & & \\
. & & \\
. & & \\
{}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_1^q} & {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_1^q\sigma_0}\cdots & {}^{ext_q(A\cup B)}f_{\sigma_1^q x_1^{\frac{[m,n,q]}{2}}}
\end{bmatrix}\right\}
$$

q - przekształceń

Liczba tych przekształceń wynosi również $[m,n,q]\times q$. A zatem otrzymujemy $2[m,n,q]\times q$ różnych przekształceń. Wynika stąd, że dla każdego słowa $card\left(I\left(\overline{ext_q\left(A\cup B\ \right)\ }\right)^*\right) = 2[m,n,q]\times q$. Zatem otrzymujemy wzór 3.

C.B.D.O.

4. WNIOSKI

Dalsze prace powinny być kontynuowane przy wyznaczaniu złożoności półgrup charakterystycznych automatów asynchronicznych spójnych. Szczegółowe rozpatrywanie klas automatów asynchronicznych silnie spójnych i spójnych wynika z powszechnego stosowania tych klas automatów w realizacjach technicznych cyfrowych układów sterujących. Sterowniki przemysłowe PLC obecnie stosowane w przemyśle, a także w pojazdach szynowych wykorzystują zgodnie z normą IEC 1131 informacje ogólne o językach programowania. Oprócz tych języków stosowane są dwie metody modelowania i programowania sekwencyjnego. Metoda Grafcet podaną w normie IEC 848 oraz metoda SFC nazywana metodą grafów sekwencji objętych normą IEC 1131-3. Wspólną cechą obu metod jest formalizm sieci Petriego typu P/T (ang. Position/Transition – miejsce/tranzycja). Z chwilą gdy nastąpił zdecydowany rozwój struktur mikrosystemów cyfrowych (2001r.), które wciąż ulegają modyfikacją, następuje proces eliminacji w niektórych zastosowaniach technicznych tradycyjnych sterowników PLC. Struktury mikrosystemów cyfrowych są wielokrotnie tańsze,

mniejsze gabarytowo, zużywają mniej energii, zwiększają wydajność pracy poprzez zintegrowanie składowych systemu. Wykorzystując narzędzia programistyczne PsoC Expres mikrosystemu cyfrowego możemy przedstawić model sterowania pojazdu szynowego w postaci grafu automatu (maszyny stanowej) i realizować program w oparciu o sporządzony wcześniej graf automatu. Umożliwia to analizę graficzną zjawisk podczas symulacji sterowania pojazdem szynowym. Wykorzystując teorię automatów możemy oszacować lub obliczyć złożoność półgrup charakterystycznych automatów. Ma to istotny wpływ na oszacowanie złożoności programów i czasu wizualizacje stanów automatów. Mikrosystemy cyfrowe stosowane są obecnie do sterowania hamulców (tablic pneumatycznych) w lokomotywach i jednostkach elektrycznych.

5. BIBLIOGRAFIA

[1] Arbib M.A.: Algebraic theory of machines languages and semigroups, Acadimic Press, New York and London 1968.

[2] Aho A.V., Hopcrofy I.E., Ullman I.D.:Projektowanie i analiza algorytmów komputerowych,PWN,Warszawa 1983.

[3] Barnes B.: On the groups of automorhism of strongly connected automata, Math.Syst. Theory 4, 4 (1970).

[4] Beatty I. C.;On some properties of semigroup of a machine which are preserved under state minimization, Information and Control 11, 3 (1970).

[5] Beyga L.: On periodic sums of automata associated with isomorphism, Foundations of Control Enginiering 1,3 (1976).

[6] Bocian S.: Złożoność półgrupy charakterystycznej automatów asynchronicznych i ich rozszerzeń, Prace Instytutu Podstaw Informatyki Polskiej Akademii Nauk nr 552, Warszawa, 1984.

[7] Bocian S., Mikołajczak.: Computational aspect of assigning characteristic semigroup asychronous automata and their extensions, Colloqia Mathematica Societatis Janos Bolyai nr 44,Amsterdam, New York, Budapest, 1985.

[8] Bocian S.: Rozprawa doktorska , Politechnika Poznańska, 1986.

[9] Bocian S.: The complexity of semigroup characterization of asynchronous strongly connection automation and thier extensions, Computational topology and geometry and computation in teaching mathematic, Universal de Sevilla,1987.

[10] Bocian S.: A new method of calculating the smallest common multiple, Computational topology and geometry and computation in teaching mathematic, Universal de Sevilla,1987.

[11] Bocian S.: Nowy sposób wyznaczania najmniejszej wspólnej wielokrotności liczb naturalnych, jako model matematyczny automatu w technice komputerowej, Pojazdy szynowe 1/2002.

[12] Bocian S.: Złożoność pólgrupy charakterystycznej automatów asynchronicznych silnie spójnych ustalonych analogów ich rozszerzeń związanych z izomorfizmami, TRANSCOMP - XIII INTERNATIONAL CONFERENCE COMPUTER SYSTEMS AIDED SCIENCES, INDUSTRY AND TRANSPORT, Zakopane 2009.

[13] Bocian S.: Nowy sposób wyznaczania najmniejszej wspólnej wielokrotności liczb naturalnych, OR – 9834 (praca nie publikowana).

[14] Bocian S: Złożoność półgrupy charakterystycznej sumy prostej i iloczynu prostego automatów asynchronicznych silnie spójnych, TRANSCOMP - XIV INTERNATIONAL CONFERENCE COMPUTER SYSTEMS AIDED SCIENCES, INDUSTRY AND TRANSPORT, Zakopane 2010.

[15] Bocian S: Złożoność półgrupy charakterystycznej sumy prostej automatów asynchronicznych silnie spójnych ustalonych analogów rozszerzeń związanych z izomorfizmami, TRANSCOMP - XIV INTERNATIONAL CONFERENCE COMPUTER SYSTEMS AIDED SCIENCES, INDUSTRY AND TRANSPORT, Zakopane 2010.

[16] Bocian S: Złożoność półgrupy charakterystycznej iloczynu prostego automatów asynchronicznych silnie spójnych ustalonych analogów rozszerzeń związanych z izomorfizmami, TRANSCOMP - XIV INTERNATIONAL CONFERENCE COMPUTER SYSTEMS AIDED SCIENCES, INDUSTRY AND TRANSPORT, Zakopane 2010.

[17] Fleck A.C.: Isomorphism groups of automata, J. Assoc. Comp. Mach. 9, 4 (1962).

[18] Gecseg F.,Peak J.: Algebraic theory of automata, Akademia Kiado, Budapest, 1972.

[19] Grzymała-Busse J.W.: On the periodic reprezentation and reducibility of periodic automata, J.Assoc. Comput. Mach. 16, 3(1969).

[20] Grzymała-Busse J.W.: On the endomorphisms of finite automata, Mach. Syst. Theory 4, 4 (1970).

[21] Grzymała-Busse J.W.: Podautomaty automatów skończonych związane ze zmianączsu pracy, Politechnika Poznańska, Rozprawy nr.46, Poznań, 1972.

[22] Kerntopf P.: Podstawowe pojęcia matematyczne w teorii automatów, PWN, Warszawa 1967.

[23] Mikołajczak B., Miądowicz Z.: On the automorphisms group of strongly related automata and structural properties of finite automata and extensions, Foundations of Control Engineering,1,2 (1976).

[24] Mikołajczak B.: On the structure of cyclic automata and their generalized periodic sums, Technical Report, Computer Science Department, Cornell University, 1977.

[25] Mikołajczak B.: On the structure of cyclic automata and their generalized periodic sums, Foundations of Control Engineering, 3,1 (1978).

[26] Mikołajczak B.: Uogólnione przekształcenia okresowe automatów skończonych, Politechnika Poznańska, Rozprawy nr.98, Poznań 1979.

[27] Mikołajczak B.: Algebraiczna i strukturalna teoria automatów, PWN Warszawa - Łódź, 1985.

[28] Mikołajczak B.: Przekształcenia i złożoność obliczeniowa problemów w teorii automatów, PWN Warszawa – Poznań, 1988.

[29] Oehmke R.H.: The semigroup of a strongly connected automaton, Math. Systems Theory, 15 (178).