dr inż. Stanisław Bocian
Instytut Pojazdów Szynowych „TABOR”

Złożoność półgrupy charakterystycznej iloczynu prostego automatów asynchronicznych silnie spójnych i ustalonych analogów ich rozszerzeń dla każdego słowa z języka $\Sigma^+ = (\sigma_0 \cup \sigma_1)^+$

Niniejsza publikacja kontynuuje cykl artykułów [6,7,8,9,12,14,15,16,17] dotyczący złożoności obliczeniowej półgrupy charakterystycznej automatów asynchronicznych silnie spójnych i ustalonych analogów ich rozszerzeń. W projektowaniu sterowania pojazdów szynowych wykorzystuje się coraz częściej mikrosystemy cyfrowe dorealizowania sterowania inteligentnego, rozproszonego. W mikrosystemach cyfrowych tworzenie oprogramowania możliwe jest z wykorzystaniem maszyny stanowej (automatu),któryumożliwia tworzenie oprogramowania w oparciu o sporządzony wcześniej graf automatu. Umożliwia to analizę pracy mikrosystemu cyfrowego w pojazdach szynowych i oszacowanie złożoności obliczeniowej półgrup charakterystycznych automatów. Ma to istotny wpływ na złożoność czasową obliczeń, jak również wielkości pamięci, potrzebnej do rozwiązania problemu.
Artykuł powstał w wyniku realizacji projektu badawczego MN i SzW nr N N509 398236 „Mikrosystemy cyfrowe do inteligentnego, rozproszonego i współbieżnego sterowania pojazdami szynowymi.”

1. Wstęp

Maszyna o skończonej liczbie stanów FSM (Finite State Machine – Skończona Maszyna Stanowa, lub automat cyfrowy) jest jednym z modeli opisującym zachowanie systemów sterowania, w którym chwilowe działanie systemu jest w sposób naturalny reprezentowane w formie stanów i przejść między nimi. W teorii automatów rozważa się pewne abstrakcyjne modele układów cyfrowych, to znaczy elementów i układów pracujących w dyskretnych chwilach czasu, przy czym sygnały mają skończoną liczbę wartości. Teoria automatów będąca teoretycznym rozwinięciem układów logicznych – jest skutecznym narzędziem, umożliwiającym formalne projektowanie złożonych układów cyfrowych z zastosowaniem standartowych układów elementarnych.

Rozwój teorii automatów był stymulowany przez dwie uzupełniające się tendencje:

a.) konstruowanie modeli bliżej związanych ze współczesnym sprzętem i oprogramowaniem,

b.) znajdowanie poprawnych narzędzi matematycznych (języka matematycznego), przy pomocy którego można wyrazić procesy obliczeniowe o dużej różnorodności.

Algebraiczna teoria automatów jest z jednej strony teoretycznym uogólnieniem teorii układów logicznych, z drugiej strony może być traktowana jako dział algebry.

Z postaci abstrakcyjnej, w procesie syntezy, można je przekształcić w schemat logiczny, wzrastające co do wielkości i złożoności problemy w informatyce, oprogramowanie lub ich kombinację. Tym samym uczy teoria automatów jak koncepcyjnie i obliczeniowo rozważać wzrastające co do wielkości i złożoności problemy w informatyce.

Rozwój teorii automatów związany jest ze wzrostem znaczenia techniki komputerowej w różnych gałęziach przemysłu, jak również z doskonaleniem metod analizy i syntezy cyfrowych układów sterowania z uwzględnieniem skali scalania i złożoności funkcjonalnej

podzespołów cyfrowych. Ten ostatni czynnik miał szczególny wpływ na rozwój teorii automatów zmiennych w czasie, bowiem automat zmienny w czasie jest adekwatnym modelem dla wielu procesów technicznych i obliczeniowych czasu rzeczywistego. Dlatego też interesujące są takie realizacje automatu, które z jednej strony symulują pracę kilku automatów za pomocą jednego automatu zmiennego w czasie, a z drugiej strony są niezależne od aktualnego stanu technologii bądź uwzględniają jej najnowsze trendy.

W zakresie teorii automatów zmiennych w czasie pojawiło się szereg opracowań [19,20,21, 22,25,27,28,29,30]. Wyniki dotyczące spójności i silnej spójności [5,26,29,30], rozszerzeń automatów [5,27,29,30] oraz funkcji zachowujących operacje [5,18,21,22,28,29,30], miały istotny wpływ na poszukiwanie złożoności półgrup charakterystycznych automatów, które stosunkowo prosto opisują niektóre własności automatów. Problemy półgrup charakterystycznych automatów przedstawiono w pracach [22,27,28,29,30]. W pracach [28,29,30] opisano badanie właściwości półgrupy charakterystycznej automatu silnie spójnego, a także półgrupy charakterystycznej ustalonego analogu różnych sum okresowych związanych z izomorfizmami stanowymi.

Algebraiczna teoria automatów jest dynamicznie rozwijającą się teorią, która z jednej strony jest teoretycznym uogólnieniem teorii układów logicznych, z drugiej strony może być traktowana jako dział algebry [1,3,19,22,24,30]. Pojęcia z algebry w postaci sformalizowanej są analizowane i przekształcane do postaci dogodnych do optymalizacji.

Od wielu lat jesteśmy świadkami intensywnego rozwoju teorii automatów, szczególnie algebraicznej teorii automatów rozwijanej na gruncie teorii półgrup [4,27,28,29,30]. Definicja relacji równoważności Myhilla na zbiorze stanów automatu oraz półgrup charakterystycznych automatu pozwoliły wydobyć zeń możliwości obliczeniowe. Dekompozycja półgrup pozwala wprowadzić pojęcie automatów nieredukowalnych, z których można złożyć wszystkie pozostałe automaty.

Półgrupa charakterystyczna jest szczególnie istotnym pojęciem w teorii automatów; jest nośnikiem ważnych informacji i określa zdolność do przetwarzania informacji. Ma to bezpośrednio ważkie konsekwencje praktyczne w sferze projektowania optymalnych układów logicznych.

Dla badań złożoności półgrupy charakterystycznej automatów ważne są następujące motywacje:

a) w ogólnym przypadku półgrupa charakterystyczna posiada n^n elementów, dlatego interesujące jest pokazanie klasy automatów, które posiadają wielomianową zależność liczby elementów półgrupy charakterystycznej od liczby stanów
b) półgrupa charakterystyczna, zgodnie z [28,29,30], ingeruje w algorytm obliczeniowy uogólnionych homomorfizmów automatów, zatem wyznaczanie złożoności półgrupy charakterystycznej pozwala na oszacowanie złożoności uogólnionych homomorfizmów automatów
c) algorytm obliczeniowy uogólnionych homomorfizmów automatów stanowi rozwiązanie problemu wyznaczania automatu, który „ma możliwość” drugiego automatu.

W publikacjach [6,7,8] przedstawiono między innymi wyniki na złożoność półgrup charakterystycznych iloczynu prostego automatu $DFASC_2$ (deterministic finite asynchronous strongly connected) i EXT $DFASC_2$ (deterministic finite asynchronous strongly connected extensions) dla słowa z alfabetu dwuliterowego. Dla tej klasy automatów przeprowadzono uproszczony dowód na złożoność półgrupy charakterystycznej iloczynu prostego automatu dla słów $x_0 = \sigma_0\sigma_1$; $x_1 = \sigma_1\sigma_0$.

W celu przeprowadzenia dowodu tw.3 na złożoność półgrup charakterystycznych iloczynu prostego automatów z klasy EXT $DFASC_2$ dla każdego słowa z języka $\Sigma^+ = (\sigma_0 \cup \sigma_1)^+$, należy przeprowadzić pełen dowód, na złożoność półgrup charakterystycznych iloczynu prostego automatu z klasy EXT $DFASC_2$ dla słowa $x_0 = \sigma_0\sigma_1$, $x_1 = \sigma_1\sigma_0$.

W pracach [14,16] przeprowadzono dowody na złożoność półgrup charakterystycznych iloczynu prostego automatu z klasy $DFASC_2$ i EXT $DFASC_2$ dla słowa z alfabetu dwuliterowego.

W pracy przeprowadzono także dowód na złożoność półgrup charakterystycznych automatu z klasy EXT $DFASC_2$ dla każdego słowa z języka $\Sigma^+ = (\sigma_0 \cup \sigma_1)^+$ (tw. 3)

Ze względu na zrozumienie dowodu tw. 3 przedstawiono także dowody tw. 1 [14] i tw. 2 [16]. Przedstawiono także dowody na izomorfizm półgrup charakterystycznych sumy prostej i iloczynu prostego automatów asynchronicznych silnie spójnych i ustalonych analogów ich rozszerzeń [15].

2. Rozważania wprowadzające

Relację $R \subseteq X \times Y$ nazywamy funkcją, gdy dla każdego $a \in X$ istnieje dokładnie jeden element $b \in Y$ taki że $a\ R\ b$. Zbiór X jest nazywany zbiorem określoności, a zbiór Y zbiorem wartości funkcji. Funkcja f jest $1 \div 1$ (różnowartościowa, jednoznaczna), gdy $a_1 \neq a_2$ implikuje, że $f(a_1) \neq f(a_2))$. Funkcja jest „na ”, gdy $Y = \{ b : b = f(a),\ a \in X \}$. Grupoidem nazywamy parę uporządkowaną $(S, \circ)$ gdzie: S niepusty zbiór, $(\circ)$ operacja binarna na zbiorze stanów S. Operacją binarną na zbiorze S nazywamy przekształcenie niepustego podzbioru zbioru $(S \times S)$ w zbiór S. Binarną operacją $(\circ)$ na zbiorze S nazywamy łączną (asocjatywną), jeśli $a \circ (b \circ c) = (a \circ b \circ c)$ dla wszystkich $a, b, c \in S$. Półgrupą nazywamy taki grupoid $(S, \circ)$, w którym operacja $(\circ)$ jest asocjatywna. Niech Σ będzie dowolnym zbiorem niepustym. Zbiór Σ będziemy nazywali alfabetem, a jego elementy literami. Słowem x w alfabecie Σ nazywamy dowolny ciąg liter alfabetu, napisanych obok siebie, a długością słowa (oznaczoną przez $|x|$) nazywamy liczbę tych liter σ.

Skończonym automatem zdeterminowanym bez wyjść nazywamy uporządkowaną trójkę (S, Σ, M), gdzie:

S–skończony, niepusty zbiór stanów,
Σ–skończony, niepusty zbiór wejść,
$M : S \times \Sigma \to S$: jest funkcją przejść.

Symbolem $\sum^{+}$ oznaczać będziemy przeliczalny nieskończony zbiór ciągów o skończonej długości, utworzony z elementów zbioru Σ. Zbiór $\sum^{+}$ razem z operacją konkatenacji (operacja połączenia dwóch słów, polegającą na napisaniu ich obok siebie w celu otrzymania nowego słowa), tworzy półgrupę wolną zwaną półgrupą wejściową. Symbolem $\sum^{*}$ oznaczać będziemy monoid wejściowy, czyli $\Sigma^{*} = \Sigma^{+} \cup \lambda$, gdzie λ jest ciągiem pustym.

Funkcję M rozszerzamy do obszaru określoności $S \times \Sigma^{+}$ w podany poniżej sposób: niech: $M(s,x)$ będzie zdefiniowane, wtedy:

$M(s,x\sigma) = M(M(s,x,),\sigma)$ dla każdego $s \in S, x \in \Sigma^{+}, \sigma \in \Sigma$.

Na zbiorze $\sum^{*}$ zdefiniujemy relację:

xRy wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_{s \in S} M(s,x) = M(x,y)$.

R jest relacją równoważności (relacja Myhilla). Klasę równoważności zawierającą element $x \in \Sigma^{*}$ oznaczać będziemy $\overline{x}$, a zbiór wszystkich klas równoważności oznaczać będziemy $\overline{I}$. Zbiór $\overline{I}$ łącznie z operacją $(\circ)$, gdzie $\overline{x} \circ \overline{y} = \overline{xy}$ tworzy półgrupę (odpowiednio monoid), zwaną półgrupą charakterystyczną (odpowiednio monoidem charakterystycznym). Półgrupę charakterystyczną automatu A oznaczać będziemy $\overline{I(A)}$.

Dla automatu $A = (S,\Sigma,M)$ definiujemy automat charakterystyczny $A = (S, I(\overline{A}), \overline{M})$, gdzie funkcja przejść $\overline{M}$ jest zdefiniowana następująco:
$\overline{M}(s,\overline{x}) = M(s,x)$.

Składnikiem autonomicznym automatu $A = (S,\sum,M)$ nazywamy automat $A_x = (S,\{x\},M_x)$ gdzie $x \in \sum^{*}$ i M_x jest ograniczeniem M do $S \times \{x\}$.

Dla każdego $x \in \Sigma^{*}$ definiujemy przekształcenie f_x zbioru S w siebie, gdzie :
$f_x(s) = M(s,x)$, dla każdego $s \in S$. Przekształcenie f_x jest implikowane przez x. Zbiór przekształceń zbioru S w siebie implikowanych przez wszystkie elementy z Σ będziemy oznaczać symbolem J. J ze względu na operację superpozycji, jest zbiorem generatorów pewnej półgrupy.
Półgrupa F jest antyizomorficzna z $\overline{I}$ ponieważ:

$$\varphi : \overline{I} \to F, \quad \varphi(\overline{x}) = f_x,$$

gdzie $x \in I$, $\overline{x} \in \overline{I}$ przy czym:

(i) $\varphi(\overline{x} \circ \overline{y}) = \varphi(\overline{xy}) = f_{xy} = f_y(f_x) = \varphi(\overline{y})\ \varphi(\overline{x})$
(brak zachowania operacji)

(ii) $\varphi(\overline{x}) = \varphi(\overline{y}) \Rightarrow f_x = f_y \Rightarrow \forall_{s \in S} M(s,x) = $
$= M(s,x) \Rightarrow xRy \Rightarrow \overline{x} = \overline{y}$,

a zatem φ jest „$1 \div 1$”

(iii) $\varphi(x) = f_x \Rightarrow \varphi^{-1}\varphi(\overline{x}) = \varphi^{-1}(f_x) \Rightarrow \overline{x} = \varphi^{-1} f_x$, a zatem φ jest „na”.

Automat można zatem zdefiniować jako parę (S,J), a automat charakterystyczny automatu (S,J) jako parę (S,F).

Automat $A = (S,\Sigma,M)$ jest silnie spójny wtedy i tylko wtedy, jeśli dla każdej pary (s_1,s_2) stanów automatu A istnieje element x z półgrupy wejściowej taki, że
$M(s_1,x) = s_2$.

Automat $A = (S,\Sigma,M)$ będziemy nazywać asynchronicznym wtedy i tylko wtedy gdy, dla każdego $s \in S$ i $\sigma \in \Sigma$ zachodzi $M(s,\sigma) = M(s,\sigma\ \sigma)$.

Automat $A = (S,\Sigma,M)$ jest zupełny, jeśli jego funkcja przejścia jest zupełna.

Automat $A = (S,\Sigma,M)$ jest w pełni określony, jeśli jego funkcja przejść jest w pełni określona.

Niech $A = ({}^{A}S,\Sigma,{}^{A}M)$ i $B = ({}^{B}S,\Sigma,{}^{B}M)$ będą automatami deterministycznymi. Funkcję $f : A \to B$ jest rozumiana jako funkcja przekształcająca ${}^{A}S$ w ${}^{B}S$. Funkcja

$f : A \to B$ nazywamy homomorfizmem (zachowuje operacje), jeżeli:

$f({}^{A}M(s,\sigma)) = BM(f(s),\sigma)$, dla każdego. $s \in S$ i $\sigma \in \Sigma$

Jeżeli $f : A \to B$ jest „$1 \div 1$” i „na” oraz zachowuje operacje, to f nazywamy izomorfizmem.

Homomorfizmem uogólnionym automatu A w B nazywamy parę przekształceń (f_1,f_2) takich, że: $f_1 : {}^{A}S \xrightarrow{w} {}^{B}S, \ldots,$ $f_2 : {}^{A}\Sigma^{*} \xrightarrow{w} {}^{B}\Sigma^{*}$, oraz
$f_1({}^{A}M(s,x)) = {}^{B}M(f_1(s), f_2(x))$ dla każdego $s \in {}^{A}S$, $x \in {}^{A}\sum^{*}$.

Niech $q \geq 2$ i $A^0 = \left(S^0, \Sigma, M^0\right)$ będzie automatem oraz niech,

$A^1 = \left(S^1, \Sigma, M^1\right)$,..., $A^{q-1} = \left(S^{q-1}, \Sigma, M^{q-1}\right)$ będą obrazami izomorficznymi związanymi z izomorfizmami stanowymi

$g^1 \in Iz(A^0 \to A^1),...,\ g^{q-1} \in Iz(A^{q-2} \to A^{q-1})$.

Rozszerzeniem q automatu A^0 związanym z izomorfizmami stanowymi $g^0, g^1, ..., g^{q-1}$ nazywamy trójkę uporządkowaną $ext_q(A) = \left({}^{ext_q(A)}S,\ \Sigma,\ {}^{ext_q(A)}M\right)$

gdzie:

${}^{ext_q(A)}S = \left(S^0, S^1, ..., S^{q-1}\right)$; ${}^{ext_q(A)}M^q =$

$= \left(M^{q,0}, M^{q,1}, ..., M^{q,q-1}\right)$

$g^i : S \to S^i$; $i = 0,1,...,q-1$

$S = \left\{s_0, s_1, ..., s_{n-1}\right\}$; $S^i = \left\{s_0^i, s_1^i, ..., s_{n-1}^i\right\}$

natomiast $s_j^i = g^i\left(s_j\right)$; $j = 0,1,...,n-1$

Ustalonym analogiem rozszerzeni $ext_q A = (S, \Sigma, M)$ automatu $A = \left(S, \Sigma, M\right)$ związanego z izomorfizmami $g^0, g^1, ..., g^{q-1}$ jest trójka uporządkowana $\left(ext_q(A)\right)^* = \left({}^{ext_q(A)}S^*, \Sigma,\ {}^{ext_q(A)}M^*\right)$ gdzie:

${}^{ext_q(A)}S^* = \bigcup_{i=0}^{q-1} S^i$;

;

a ${}^{ext_q(A)}M^* : {}^{ext_q}S^* \times \Sigma \to {}^{ext_q(A)}S^*$

jest funkcją przejść zdefiniowaną dla dowolnych $s \in S^i$, jak następuje ${}^{ext_q(A)}M^*(s, \sigma) = M^{q,i}(s, \sigma)$.

Iloczyn prosty automatów

$A = {}^AS, \Sigma, {}^AM$ i $B = \left({}^BS, \Sigma, {}^BM\right)$ jest trójką uporządkowaną $A \times B = \left({}^{(A\times B)}S, \Sigma, {}^{(A\times B)}M\right)$, gdzie

${}^{(A\times B)}S = {}^AS \times {}^BS$;

${}^{(A\times B)}M : {}^{(A\times B)}S \times \Sigma \to {}^{(A\times B)}S$, a funkcja przejść jest zdefiniowana jak następuje

${}^{A\times B}M\left(\left({}^As, {}^Bs\right), (\sigma)\right) = \left({}^AM\left({}^As, \sigma\right), {}^BM\left({}^Bs, \sigma\right)\right)$.

Dla wszystkich przedstawionych rozważań

$\Sigma = \left\{\sigma_0, \sigma_1\right\}$,

wprowadzamy $x_0 = \sigma_0, \sigma_1$ i $x_1 = \sigma_1 \sigma_0$, dla których

$f_{x_0} = f_{\sigma_1}\left(f_{\sigma_0}\right)$, $f_{x_1} = f_{\sigma_0}\left(f_{\sigma_1}\right)$. Dla dowolnego

$x \in \Sigma^*$ zdefiniujemy przekształcenie

$f_x : S \xrightarrow{w} S$ określone jak następuje:

$\forall_{s\in S} f_x(s) = M(s, x)$ gdzie: dla $x = x'\sigma$ mamy

$\forall_{s\in S} f_x(s) = f_{x'\sigma}(s) = f_\sigma(f_{x'}(s))$.

3. Złożoność półgrupy charakterystycznej iloczynu prostego automatów asynchronicznych silnie spójnych i ustalonych analogów ich rozszerzeń

3.1. Złożoność półgrupy charakterystycznej iloczynu prostego automatów z klasy DFASC$_2$ [14]

Twierdzenie 1.

Niech $A \times B = \left({}^{(A\times B)}S, \Sigma, {}^{(A\times B)}M\right)$ będzie iloczynem prostym automatów $A = \left({}^AS, \Sigma, {}^AM\right)$ i $B = \left({}^BS, \Sigma, {}^BM\right)$ z klasy DFASC$_2$; wtedy półgrupa charakterystyczna $\overline{I(A \times B)}$ iloczynu prostego automatów $A \times B$ ma własność:

$$card\left(\overline{I(A \times B)}\right) = 2[m, n] \qquad (1)$$

gdzie: card $({}^AS) = m > 2$; card ${}^BS = n > 2$; m, n liczby naturalne m > n; card $\Sigma = 2$;

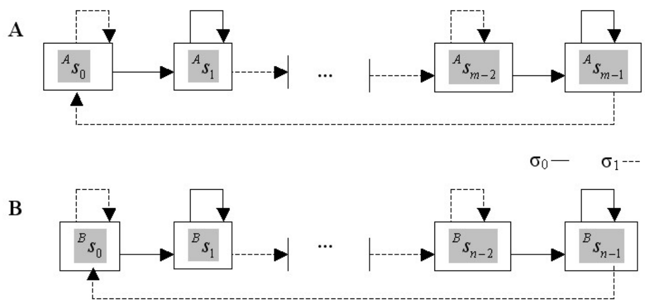
$x_0 = \sigma_0\ \sigma_1$; $x_1 = \sigma_1\ \sigma_0$; [m, n] – najmniejsza wspólna wielokrotność liczb m, n, patrz [13].

$k_0 = \dfrac{(m - d_0)}{n}$, gdzie: d_0 – reszta z dzielenia liczb m, n; $b_0 = n - d_0$.

Dowód.

Na rys.1. przedstawiono automaty A i B z klasy DFASC$_2$. Zbiory stanów automatów A i B są następujące: ${}^AS = \left\{{}^As_0, {}^As_1, ..., {}^As_{m-2}, {}^As_{m-1}\right\}$; ${}^BS = \left\{{}^Bs_0, {}^Bs_1, ..., {}^Bs_{n-2}, {}^Bs_{n-1}\right\}$

Wiadomo, że iloczyn prosty zbiorów stanów automatów A i B wynosi:



Rys. 1. Automaty A i B z klasy DFASC$_2$

$$ {}^{(A\times B)}S={}^{A}S\times{}^{B}S=\left\{\begin{array}{l}\left({}^{A}s_0,{}^{B}s_0\right),\left({}^{A}s_1,{}^{B}s_0\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2},{}^{B}s_0\right),\left({}^{A}s_{m-1},{}^{B}s_0\right),\left({}^{A}s_0,{}^{B}s_1\right),\left({}^{A}s_1,{}^{B}s_1\right),\ldots,\\ \left({}^{A}s_{m-2},{}^{B}s_1\right),\left({}^{A}s_{m-1},{}^{B}s_1\right),\ldots,\left({}^{A}s_0,{}^{B}s_{n-2}\right),\left({}^{A}s_1,{}^{B}s_{n-2}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2},{}^{B}s_{n-2}\right),\\ \left({}^{A}s_{m-1},{}^{B}s_{n-2}\right),\left({}^{A}s_0,{}^{B}s_{n-1}\right),\left({}^{A}s_1,{}^{B}s_{n-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2},{}^{B}s_{n-1}\right),\left({}^{A}s_{m-1},{}^{B}s_{n-1}\right)\end{array}\right\} $$

Po przekształceniu zbioru uporządkowanych par stanów automatów A i B pod wpływem litery σ_0 otrzymujemy:

$$ {}^{(A\times B)}f_{\sigma_0}=\left(\begin{array}{l}\left({}^{A}s_1,{}^{B}s_1\right),\left({}^{A}s_1,{}^{B}s_1\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1},{}^{B}s_1\right),\left({}^{A}s_{m-1},{}^{B}s_1\right),\left({}^{A}s_1,{}^{B}s_1\right),\left({}^{A}s_1,{}^{B}s_1\right),\ldots,\\ \left({}^{A}s_{m-1},{}^{B}s_1\right),\left({}^{A}s_{m-1},{}^{B}s_1\right),\ldots,\left({}^{A}s_1,{}^{B}s_{n-1}\right),\left({}^{A}s_1,{}^{B}s_{n-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1},{}^{B}s_{n-1}\right),\\ \left({}^{A}s_{m-1},{}^{B}s_{n-1}\right),\left({}^{A}s_1,{}^{B}s_{n-1}\right),\left({}^{A}s_1,{}^{B}s_{n-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1},{}^{B}s_{n-1}\right),\left({}^{A}s_{m-1},{}^{B}s_{n-1}\right)\end{array}\right) $$

Pod wpływem słowa x_0 otrzymujemy przekształcenie:

$$ {}^{(A\times B)}f_{x_0}=\left(\begin{array}{l}\left({}^{A}s_2,{}^{B}s_2\right),\left({}^{A}s_2,{}^{B}s_2\right),\ldots,\left({}^{A}s_0,{}^{B}s_2\right),\left({}^{A}s_0,{}^{B}s_2\right),\left({}^{A}s_2,{}^{B}s_2\right),\left({}^{A}s_2,{}^{B}s_2\right),\ldots,\\ \left({}^{A}s_0,{}^{B}s_2\right),\left({}^{A}s_0,{}^{B}s_2\right),\ldots,\left({}^{A}s_2,{}^{B}s_0\right),\left({}^{A}s_2,{}^{B}s_0\right),\ldots,\left({}^{A}s_0,{}^{B}s_0\right),\\ \left({}^{A}s_0,{}^{B}s_0\right),\left({}^{A}s_2,{}^{B}s_0\right),\left({}^{A}s_2,{}^{B}s_0\right),\ldots,\left({}^{A}s_0,{}^{B}s_0\right),\left({}^{A}s_0,{}^{B}s_0\right)\end{array}\right) $$

$$ {}^{(A\times B)}f_{x_0\sigma_1}={}^{(A\times B)}f_{x_0} $$

Po $\frac{n}{2}$ – krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$ {}^{(A\times B)}f_{x_0^{\frac{n}{2}}}=\left(\begin{array}{l}\left({}^{A}s_{\frac{m-d_0}{k_0}},{}^{B}s_0\right)\left({}^{A}s_{\frac{m-d_0}{k_0}},{}^{B}s_0\right),\ldots,\left({}^{A}s_{\frac{m-d_0}{k_0}-2},{}^{B}s_0\right)\left({}^{A}s_{\frac{m-d_0}{k_0}-2},{}^{B}s_0\right)\\ \left({}^{A}s_{\frac{m-d_0}{k_0}},{}^{B}s_0\right)\left({}^{A}s_{\frac{m-d_0}{k_0}},{}^{B}s_0\right),\ldots,\left({}^{A}s_{\frac{m-d_0}{k_0}-2},{}^{B}s_0\right)\left({}^{A}s_{\frac{m-d_0}{k_0}-2},{}^{B}s_0\right),\ldots,\\ \left({}^{A}s_{\frac{m-d_0}{k_0}},{}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_{\frac{m-d_0}{k_0}},{}^{B}s_{n-2}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{\frac{m-d_0}{k_0}-2},{}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_{\frac{m-d_0}{k_0}-2},{}^{B}s_{n-2}\right)\\ \left({}^{A}s_{\frac{m-d_0}{k_0}},{}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_{\frac{m-d_0}{k_0}},{}^{B}s_{n-2}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{\frac{m-d_0}{k_0}-2},{}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_{\frac{m-d_0}{k_0}-2},{}^{B}s_{n-2}\right)\end{array}\right) $$

gdzie: $d_0 = m - k_0 n$; $b_0 = n - d_0$.

Po $k_0 \frac{n}{2}$ – krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$ {}^{(A\times B)}f_{x_0^{k_0\frac{n}{2}}}=\left(\begin{array}{l}\left({}^{A}s_{m-d_0},{}^{B}s_0\right),\left({}^{A}s_{m-d_0},{}^{B}s_0\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-d_0-2},{}^{B}s_0\right)\left({}^{A}s_{m-d_0-2},{}^{B}s_0\right),\\ \left({}^{A}s_{m-d_0},{}^{B}s_0\right)\left({}^{A}s_{m-d_0},{}^{B}s_0\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-d_0-2},{}^{B}s_0\right)\left({}^{A}s_{m-d_0-2},{}^{B}s_0\right),\ldots,\\ \left({}^{A}s_{m-d_0},{}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_{m-d_0},{}^{B}s_{n-2}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-d_0-2},{}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_{m-d_0-2},{}^{B}s_{n-2}\right)\\ \left({}^{A}s_{m-d_0},{}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_{m-d_0},{}^{B}s_{n-2}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-d_0-2},{}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_{m-d_0-2},{}^{B}s_{n-2}\right)\end{array}\right) $$

Po $k_0 n$ – krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$
{}^{(A\times B)}f_{x_0^{k_0 n}} = \begin{pmatrix}
\left({}^{A}s_{m-d_1}, {}^{B}s_0\right), \left({}^{A}s_{m-d_1}, {}^{B}s_0\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-d_1-2}, {}^{B}s_0\right)\left({}^{A}s_{m-d_1-2}, {}^{B}s_0\right), \\
\left({}^{A}s_{m-d_1}, {}^{B}s_0\right)\left({}^{A}s_{m-d_1}, {}^{B}s_0\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-d_1-2}, {}^{B}s_0\right)\left({}^{A}s_{m-d_1-2}, {}^{B}s_0\right), \ldots, \\
\left({}^{A}s_{m-d_1}, {}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_{m-d_1}, {}^{B}s_{n-2}\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-d_1-2}, {}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_{m-d_1-2}, {}^{B}s_{n-2}\right) \\
\left({}^{A}s_{m-d_1}, {}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_{m-d_1}, {}^{B}s_{n-2}\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-d_1-2}, {}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_{m-d_1-2}, {}^{B}s_{n-2}\right)
\end{pmatrix}
$$

gdzie: zgodnie ze sposobem wyznaczania [m, n] mamy: $d_1 = m - b_0 - k_0 n$; $b_1 = n_1 - d_1$

Po $\frac{wm}{2} = \frac{[m,n]}{2}$ – krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$
{}^{(A\times B)}f_{x_0^{\frac{[m,n]}{2}}} = \begin{pmatrix}
\left({}^{A}s_{m-d_w}, {}^{B}s_0\right), \left({}^{A}s_{m-d_w}, {}^{B}s_0\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-d_w-2}, {}^{B}s_0\right)\left({}^{A}s_{m-d_w-2}, {}^{B}s_0\right), \\
\left({}^{A}s_{m-d_w}, {}^{B}s_0\right)\left({}^{A}s_{m-d_w}, {}^{B}s_0\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-d_w-2}, {}^{B}s_0\right)\left({}^{A}s_{m-d_w-2}, {}^{B}s_0\right), \ldots, \\
\left({}^{A}s_{m-d_w}, {}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_{m-d_w}, {}^{B}s_{n-2}\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-d_w-2}, {}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_{m-d_w-2}, {}^{B}s_{n-2}\right) \\
\left({}^{A}s_{m-d_w}, {}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_{m-d_w}, {}^{B}s_{n-2}\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-d_w-2}, {}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_{m-d_w-2}, {}^{B}s_{n-2}\right)
\end{pmatrix}
$$

gdzie: zgodnie ze sposobem wyznaczania [m, n] mamy:

$$
d_{w-1} = m - b_{w-2} - k_0 n = 0; \quad [m,n] = mw = p
$$

Stąd:

$$
{}^{(A\times B)}f_{x_0^{\frac{[m,n]}{2}}} = \begin{pmatrix}
\left({}^{A}s_0, {}^{B}s_0\right)\left({}^{A}s_0, {}^{B}s_0\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-2}, {}^{B}s_0\right)\left({}^{A}s_{m-2}, {}^{B}s_0\right)\left({}^{A}s_0, {}^{B}s_0\right)\left({}^{A}s_0, {}^{B}s_0\right), \ldots, \\
\left({}^{A}s_{m-2}, {}^{B}s_0\right)\left({}^{A}s_{m-2}, {}^{B}s_0\right), \ldots, \left({}^{A}s_0, {}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_0, {}^{B}s_{n-2}\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-2}, {}^{B}s_{n-2}\right) \\
\left({}^{A}s_{m-2}, {}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_0, {}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_0, {}^{B}s_{n-2}\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-2}, {}^{B}s_{n-2}\right)\left({}^{A}s_{m-2}, {}^{B}s_{n-2}\right)
\end{pmatrix}
$$

Po $x_0^{\frac{[m,n]}{2}}\sigma_0$ – krotnej konkatenacji otrzymujemy:

$$
{}^{(A\times B)}f_{x_0^{\frac{[m,n]}{2}}\sigma_0} = \begin{pmatrix}
\left({}^{A}s_1, {}^{B}s_1\right)\left({}^{A}s_1, {}^{B}s_1\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-1}, {}^{B}s_1\right)\left({}^{A}s_{m-1}, {}^{B}s_1\right)\left({}^{A}s_1, {}^{B}s_1\right)\left({}^{A}s_1, {}^{B}s_1\right), \ldots, \\
\left({}^{A}s_{m-1}, {}^{B}s_1\right)\left({}^{A}s_{m-1}, {}^{B}s_1\right), \ldots, \left({}^{A}s_1, {}^{B}s_{n-1}\right)\left({}^{A}s_1, {}^{B}s_{n-1}\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-1}, {}^{B}s_{n-1}\right) \\
\left({}^{A}s_{m-1}, {}^{B}s_{n-1}\right)\left({}^{A}s_1, {}^{B}s_{n-1}\right)\left({}^{A}s_1, {}^{B}s_{n-1}\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-1}, {}^{B}s_{n-1}\right)\left({}^{A}s_{m-1}, {}^{B}s_{n-1}\right)
\end{pmatrix}
$$

$$
{}^{(A\times B)}f_{x_0^{\frac{[m,n]}{2}}\sigma_0} = {}^{(A\times B)}f_{\sigma_0}
$$

Identyczną liczbę przekształceń uzyskujemy rozpoczynając przekształcenie zbioru uporządkowanych par stanów automatów A i B pod wpływem $\frac{[m,n]}{2}$ krotnej konkatenacji słowa $x_1 = \sigma_1\sigma_0$. Zatem otrzymujemy wzór (1).

C.B.D.O.

3.2. Złożoność półgrupy charakterystycznej iloczynu prostego automatów z klasy EXT DFASC$_2$ [16]

Twierdzenie 2.

Niech $ext_q(A \times B) = \left({}^{ext_q(A\times B)}S, \Sigma, {}^{ext_q(A\times B)}M\right)$ będzie rozszerzeniem stanowym związanym z izomorfizmami $g_0, g_1, \ldots, g_{q-1}$ iloczynu prostego $A \times B = \left({}^{A\times B}S, \Sigma, {}^{A\times B}M\right)$ automatów $A = \left({}^{A}S, \Sigma, {}^{A}M\right)$ i $B = \left({}^{B}S, \Sigma, {}^{B}M\right)$ z klasy DFASC$_2$; wtedy półgrupa charakterystyczna $\overline{I(ext_q(A\times B))}^*$ ustalonego analogu rozszerzenia ma własność:

$$
card\left(\overline{I(ext)_q(A\times B)}\right)^* = 2[m,n,q]\times q \tag{2}
$$

gdzie: card (^{A}S) = m > 2; card (^{B}S) = n >2; m, n liczby naturalne m > n; card Σ= 2; $x_0 = \sigma_0\,\sigma_1$; $x_1 = \sigma_1\,\sigma_0$; [m, n] – najmniejsza wspólna wielokrotność liczb m, n, patrz [13].

Dowód.

Uwzględniając rys.2 otrzymujemy następujące uporządkowane pary stanów:

$$
{}^{ext_q(A\times B)}S =
$$

$$
\left(\begin{array}{l}
\left({}^{A}s_{0}^{0},{}^{B}s_{0}^{0}\right),\left({}^{A}s_{0}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{0},{}^{B}s_{n-2}^{0}\right),\left({}^{A}s_{0}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{0}^{0}\right),\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\\
\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-2}^{0}\right),\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{0},{}^{B}s_{0}^{0}\right),\left({}^{A}s_{m-2}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{0},{}^{B}s_{n-2}^{0}\right),\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{0}^{0}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-2}^{0}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right)
\end{array}\right)
$$

.

.

.

$$
\left(\begin{array}{l}
\left({}^{A}s_{0}^{q-1},{}^{B}s_{0}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{0}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{q-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{0}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{0}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\ldots,\\
\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-1},{}^{B}s_{0}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{m-2}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-1}\right),\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{0}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right)
\end{array}\right)
$$

Po przekształceniu pod wpływem σ_0 uporządkowanych par stanów rozszerzenia stanowego iloczynu prostego A i B otrzymujemy

$$
{}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0} =
$$

$$
\left(\begin{array}{l}
\left({}^{A}s_{1}^{1},{}^{B}s_{1}^{1}\right),\left({}^{A}s_{1}^{1},{}^{B}s_{1}^{1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{1}^{1},{}^{B}s_{n-1}^{1}\right),\left({}^{A}s_{1}^{1},{}^{B}s_{n-1}^{1}\right),\left({}^{A}s_{1}^{1},{}^{B}s_{1}^{1}\right),\left({}^{A}s_{1}^{1},{}^{B}s_{1}^{1}\right),\ldots,\\
\left({}^{A}s_{1}^{1},{}^{B}s_{n-1}^{1}\right),\left({}^{A}s_{1}^{1},{}^{B}s_{n-1}^{1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{1},{}^{B}s_{1}^{1}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{1},{}^{B}s_{1}^{1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{1},{}^{B}s_{n-1}^{1}\right),\\
\left({}^{A}s_{m-1}^{1},{}^{B}s_{n-1}^{1}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{1},{}^{B}s_{1}^{1}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{1},{}^{B}s_{1}^{1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{1},{}^{B}s_{n-1}^{1}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{1},{}^{B}s_{n-1}^{1}\right)
\end{array}\right)
$$

.

.

.

$$
\left(\begin{array}{l}
\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\\
\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{0}^{0}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m1}^{0},{}^{B}s_{n-2}^{0}\right),\\
\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right)
\end{array}\right)
$$

Po q – krotnej konkatenacji σ_0 otrzymujemy:

$$
{}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^q} =
$$

$$
\left(\begin{array}{l}
\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\\
\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\\
\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right)
\end{array}\right)
$$

.

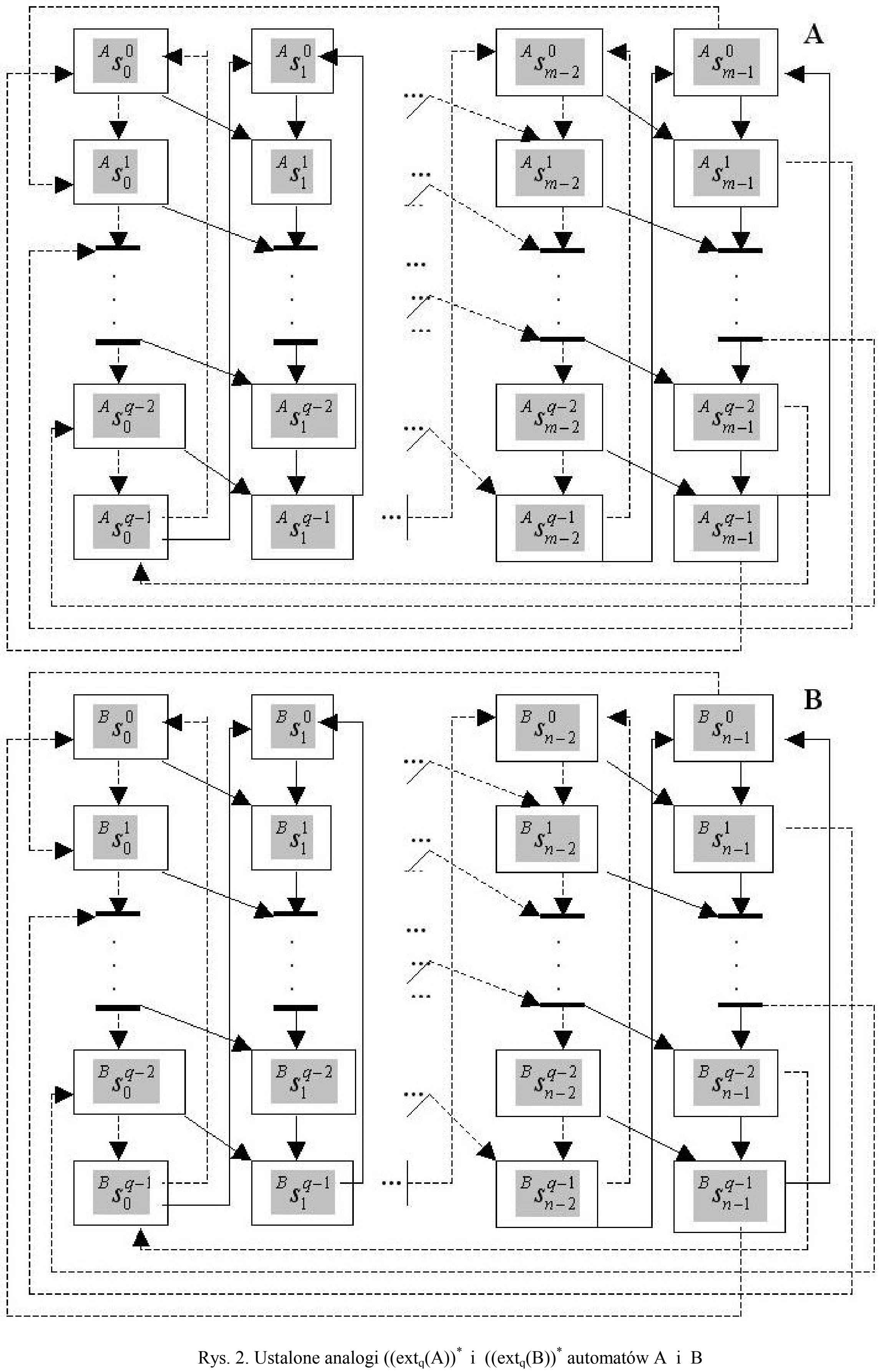
.

.

$$
\left(\begin{array}{l}
\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\\
\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\ldots,\\
\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right)
\end{array}\right)
$$

Po (q+1) – krotnej konkatenacji litery σ_0 otrzymujemy:

$$
{}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{q+1}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0}
$$



Rys. 2. Ustalone analogi $((ext_q(A))^*$ i $((ext_q(B))^*$ automatów A i B

Z kolei pod wpływem słowa $x_0 = \sigma_0\sigma_1$ otrzymujemy:

$$
{}^{ext_q(A\times B)}f_{x_0} =
$$

$$
\begin{pmatrix}
\left({}^{A}s_2^2,{}^{B}s_2^2\right),\left({}^{A}s_2^2,{}^{B}s_2^2\right),\ldots,\left({}^{A}s_2^2,{}^{B}s_0^2\right),\left({}^{A}s_2^2,{}^{B}s_0^2\right),\left({}^{A}s_2^2,{}^{B}s_2^2\right),\left({}^{A}s_2^2,{}^{B}s_2^2\right),\ldots,\left({}^{A}s_2^2,{}^{B}s_0^2\right),\left({}^{A}s_2^2,{}^{B}s_0^2\right),\ldots,\\
\left({}^{A}s_0^2,{}^{B}s_2^2\right),\left({}^{A}s_0^2,{}^{B}s_2^2\right),\ldots,\left({}^{A}s_0^2,{}^{B}s_0^2\right),\left({}^{A}s_0^2,{}^{B}s_0^2\right),\left({}^{A}s_0^2,{}^{B}s_2^2\right),\left({}^{A}s_0^2,{}^{B}s_2^2\right),\ldots,\left({}^{A}s_0^2,{}^{B}s_0^2\right),\left({}^{A}s_0^2,{}^{B}s_0^2\right)
\end{pmatrix}
$$

.

.

.

$$
\begin{pmatrix}
\left({}^{A}s_2^1,{}^{B}s_2^1\right),\left({}^{A}s_2^1,{}^{B}s_2^1\right),\ldots,\left({}^{A}s_2^1,{}^{B}s_0^1\right),\left({}^{A}s_2^1,{}^{B}s_0^1\right),\left({}^{A}s_2^1,{}^{B}s_2^1\right),\left({}^{A}s_2^1,{}^{B}s_2^1\right),\ldots,\left({}^{A}s_2^1,{}^{B}s_0^1\right),\left({}^{A}s_2^1,{}^{B}s_0^1\right),\ldots,\\
\left({}^{A}s_0^1,{}^{B}s_2^1\right),\left({}^{A}s_0^1,{}^{B}s_2^1\right),\ldots,\left({}^{A}s_0^1,{}^{B}s_0^1\right),\left({}^{A}s_0^1,{}^{B}s_0^1\right),\left({}^{A}s_0^1,{}^{B}s_2^1\right),\left({}^{A}s_0^1,{}^{B}s_2^1\right),\ldots,\left({}^{A}s_0^1,{}^{B}s_0^1\right),\left({}^{A}s_0^1,{}^{B}s_0^1\right)
\end{pmatrix}
$$

Po $\frac{n}{2}$ – krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$
{}^{ext_q(A\times B)}f_{x_0^{\frac{n}{2}}} =
$$

$$
\begin{pmatrix}
\left({}^{A}s^n_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}\right)},{}^{B}s^n_0\right),\left({}^{A}s^n_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}\right)},{}^{B}s^n_0\right),\ldots,\left({}^{A}s^n_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}\right)},{}^{B}s^n_{n-2}\right),\left({}^{A}s^n_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}\right)},{}^{B}s^n_{n-2}\right),\\
\left({}^{A}s^n_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}\right)},{}^{B}s^n_0\right),\left({}^{A}s^n_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}\right)},{}^{B}s^n_0\right),\ldots,\left({}^{A}s^n_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}\right)},{}^{B}s^n_{n-2}\right),\left({}^{A}s^n_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}\right)},{}^{B}s^n_{n-2}\right),\ldots,\\
\left({}^{A}s^n_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}-2\right)},{}^{B}s^n_0\right),\left({}^{A}s^n_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}-2\right)},{}^{B}s^n_0\right),\ldots,\left({}^{A}s^n_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}-2\right)},{}^{B}s^n_{n-2}\right),\left({}^{A}s^n_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}-2\right)},{}^{B}s^n_{n-2}\right),\\
\left({}^{A}s^n_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}-2\right)},{}^{B}s^n_0\right),\left({}^{A}s^n_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}-2\right)},{}^{B}s^n_0\right),\ldots,\left({}^{A}s^n_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}-2\right)},{}^{B}s^n_{n-2}\right),\left({}^{A}s^n_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}-2\right)},{}^{B}s^n_{n-2}\right)
\end{pmatrix}
$$

.

.

.

$$
\begin{pmatrix}
\left({}^{A}s^{n-1}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}\right)},{}^{B}s^{n-1}_0\right),\left({}^{A}s^{n-1}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}\right)},{}^{B}s^{n-1}_0\right),\ldots,\left({}^{A}s^{n-1}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}\right)},{}^{B}s^{n-1}_{n-2}\right),\left({}^{A}s^{n-1}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}\right)},{}^{B}s^{n-1}_{n-2}\right),\\
\left({}^{A}s^{n-1}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}\right)},{}^{B}s^{n-1}_0\right),\left({}^{A}s^{n-1}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}\right)},{}^{B}s^{n-1}_0\right),\ldots,\left({}^{A}s^{n-1}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}\right)},{}^{B}s^{n-1}_{n-2}\right),\left({}^{A}s^{n-1}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}\right)},{}^{B}s^{n-1}_{n-2}\right),\ldots,\\
\left({}^{A}s^{n-1}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}-2\right)},{}^{B}s^{n-1}_0\right),\left({}^{A}s^{n-1}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}-2\right)},{}^{B}s^{n-1}_0\right),\ldots,\left({}^{A}s^{n-1}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}-2\right)},{}^{B}s^{n-1}_{n-2}\right),\left({}^{A}s^{n-1}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}-2\right)},{}^{B}s^{n-1}_{n-2}\right),\\
\left({}^{A}s^{n-1}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}-2\right)},{}^{B}s^{n-1}_0\right),\left({}^{A}s^{n-1}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}-2\right)},{}^{B}s^{n-1}_0\right),\ldots,\left({}^{A}s^{n-1}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}-2\right)},{}^{B}s^{n-1}_{n-2}\right),\left({}^{A}s^{n-1}_{\left(\frac{m-d_o}{k_0}-2\right)},{}^{B}s^{n-1}_{n-2}\right)
\end{pmatrix}
$$

gdzie: zgodnie ze sposobem wyznaczania [m, n] mamy: $d_0 = m - k_0 n$; $b_0 = n - d_0$

Po $k_0 \frac{n}{2}$ – krotnej konkatenacji słowa x_o otrzymujemy:

$$\begin{pmatrix} \left({}^{A}s^{k_o n}_{m-d_0}, {}^{B}s^{k_o n}_{0}\right), \left({}^{A}s^{k_o n}_{m-d_0}, {}^{B}s^{k_o n}_{0}\right), \ldots, \left({}^{A}s^{k_o n}_{m-d_0}, {}^{B}s^{k_o n}_{n-2}\right), \left({}^{A}s^{k_o n}_{m-d_0}, {}^{B}s^{k_o n}_{n-2}\right) \\ \left({}^{A}s^{k_o n}_{m-d_0}, {}^{B}s^{k_o n}_{0}\right), \left({}^{A}s^{k_o n}_{m-d_0}, {}^{B}s^{k_o n}_{0}\right), \ldots, \left({}^{A}s^{k_o n}_{m-d_0}, {}^{B}s^{k_o n}_{n-2}\right), \left({}^{A}s^{k_o n}_{m-d_0}, {}^{B}s^{k_o n}_{n-2}\right), \ldots, \\ \left({}^{A}s^{k_o n}_{m-d_0-2}, {}^{B}s^{k_o n}_{0}\right), \left({}^{A}s^{k_o n}_{m-d_0-2}, {}^{B}s^{k_o n}_{0}\right), \ldots, \left({}^{A}s^{k_o n}_{m-d_0-2}, {}^{B}s^{k_o n}_{n-2}\right), \left({}^{A}s^{k_o n}_{m-d_0}, {}^{B}s^{k_o n}_{n-2}\right), \\ \left({}^{A}s^{k_o n}_{m-d_0-2}, {}^{B}s^{k_o n}_{0}\right)\left({}^{A}s^{k_o n}_{m-d_0-2}, {}^{B}s^{k_o n}_{0}\right), \ldots, \left({}^{A}s^{k_o n}_{m-d_0-2}, {}^{B}s^{k_o n}_{n-2}\right), \left({}^{A}s^{k_o n}_{m-d_0-2}, {}^{B}s^{k_o n}_{n-2}\right) \end{pmatrix}$$

.

.

.

$$\begin{pmatrix} \left({}^{A}s^{k_o n-1}_{m-d_0}, {}^{B}s^{k_o n-1}_{0}\right), \left({}^{A}s^{k_o n-1}_{m-d_0}, {}^{B}s^{k_o n-1}_{0}\right), \ldots, \left({}^{A}s^{k_o n-1}_{m-d_0}, {}^{B}s^{k_o n-1}_{n-2}\right), \left({}^{A}s^{k_o n-1}_{m-d_0}, {}^{B}s^{k_o n-1}_{n-2}\right) \\ \left({}^{A}s^{k_o n-1}_{m-d_0}, {}^{B}s^{k_o n-1}_{0}\right), \left({}^{A}s^{k_o n-1}_{m-d_0}, {}^{B}s^{k_o n-1}_{0}\right), \ldots, \left({}^{A}s^{k_o n-1}_{m-d_0}, {}^{B}s^{k_o n-1}_{n-2}\right), \left({}^{A}s^{k_o n-1}_{m-d_0}, {}^{B}s^{k_o n-1}_{n-2}\right), \ldots, \\ \left({}^{A}s^{k_o n-1}_{m-d_0-2}, {}^{B}s^{k_o n-1}_{0}\right), \left({}^{A}s^{k_o n-1}_{m-d_0-2}, {}^{B}s^{k_o n-1}_{0}\right), \ldots, \left({}^{A}s^{k_o n-1}_{m-d_0-2}, {}^{B}s^{k_o n-1}_{n-2}\right), \left({}^{A}s^{k_o n-1}_{m-d_0}, {}^{B}s^{k_o n-1}_{n-2}\right), \\ \left({}^{A}s^{k_o n-1}_{m-d_0-2}, {}^{B}s^{k_o n-1}_{0}\right)\left({}^{A}s^{k_o n-1}_{m-d_0-2}, {}^{B}s^{k_o n-1}_{0}\right), \ldots, \left({}^{A}s^{k_o n-1}_{m-d_0-2}, {}^{B}s^{k_o n-1}_{n-2}\right), \left({}^{A}s^{k_o n-1}_{m-d_0-2}, {}^{B}s^{k_o n-1}_{n-2}\right) \end{pmatrix}$$

Po k_0 n – krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$${}^{ext_q(A\times B)}f_{x_0^{k_0 n}} =$$

$$\begin{pmatrix} \left({}^{A}s^{2k_o n}_{m-d_1}, {}^{B}s^{2k_o n}_{0}\right), \left({}^{A}s^{2k_o n}_{m-d_1}, {}^{B}s^{2k_o n}_{0}\right), \ldots, \left({}^{A}s^{2k_o n}_{m-d_1}, {}^{B}s^{2k_o n}_{n-2}\right), \left({}^{A}s^{2k_o n}_{m-d_1}, {}^{B}s^{2k_o n}_{n-2}\right) \\ \left({}^{A}s^{2k_o n}_{m-d_1}, {}^{B}s^{2k_o n}_{0}\right), \left({}^{A}s^{2k_o n}_{m-d_1}, {}^{B}s^{2k_o n}_{0}\right), \ldots, \left({}^{A}s^{2k_o n}_{m-d_1}, {}^{B}s^{2k_o n}_{n-2}\right), \left({}^{A}s^{2k_o n}_{m-d_1}, {}^{B}s^{2k_o n}_{n-2}\right), \ldots, \\ \left({}^{A}s^{2k_o n}_{m-d_1-2}, {}^{B}s^{2k_o n}_{0}\right), \left({}^{A}s^{2k_o n}_{m-d_1-2}, {}^{B}s^{2k_o n}_{0}\right), \ldots, \left({}^{A}s^{2k_o n}_{m-d_1-2}, {}^{B}s^{2k_o n}_{n-2}\right), \left({}^{A}s^{2k_o n}_{m-d_1}, {}^{B}s^{2k_o n}_{n-2}\right), \\ \left({}^{A}s^{2k_o n}_{m-d_1-2}, {}^{B}s^{2k_o n}_{0}\right)\left({}^{A}s^{2k_o n}_{m-d_1-2}, {}^{B}s^{2k_o n}_{0}\right), \ldots, \left({}^{A}s^{2k_o n}_{m-d_1-2}, {}^{B}s^{2k_o n}_{n-2}\right), \left({}^{A}s^{2k_o n}_{m-d_1-2}, {}^{B}s^{2k_o n}_{n-2}\right) \end{pmatrix}$$

.

.

.

$$\begin{pmatrix} \left({}^{A}s^{2k_o n-1}_{m-d_1}, {}^{B}s^{2k_o n-1}_{0}\right), \left({}^{A}s^{2k_o n-1}_{m-d_1}, {}^{B}s^{2k_o n-1}_{0}\right), \ldots, \left({}^{A}s^{2k_o n-1}_{m-d_1}, {}^{B}s^{2k_o n-1}_{n-2}\right), \left({}^{A}s^{2k_o n-1}_{m-d_1}, {}^{B}s^{2k_o n-1}_{n-2}\right) \\ \left({}^{A}s^{2k_o n-1}_{m-d_1}, {}^{B}s^{2k_o n-1}_{0}\right), \left({}^{A}s^{2k_o n-1}_{m-d_1}, {}^{B}s^{2k_o n-1}_{0}\right), \ldots, \left({}^{A}s^{2k_o n-1}_{m-d_1}, {}^{B}s^{2k_o n-1}_{n-2}\right), \left({}^{A}s^{2k_o n-1}_{m-d_1}, {}^{B}s^{2k_o n-1}_{n-2}\right), \ldots, \\ \left({}^{A}s^{2k_o n-1}_{m-d_1-2}, {}^{B}s^{2k_o n-1}_{0}\right), \left({}^{A}s^{2k_o n-1}_{m-d_1-2}, {}^{B}s^{2k_o n-1}_{0}\right), \ldots, \left({}^{A}s^{2k_o n-1}_{m-d_1-2}, {}^{B}s^{2k_o n-1}_{n-2}\right), \left({}^{A}s^{2k_o n-1}_{m-d_1}, {}^{B}s^{2k_o n-1}_{n-2}\right), \\ \left({}^{A}s^{2k_o n-1}_{m-d_1-2}, {}^{B}s^{2k_o n-1}_{0}\right)\left({}^{A}s^{2k_o n-1}_{m-d_1-2}, {}^{B}s^{2k_o n-1}_{0}\right), \ldots, \left({}^{A}s^{2k_o n-1}_{m-d_1-2}, {}^{B}s^{2k_o n-1}_{n-2}\right), \left({}^{A}s^{2k_o n-1}_{m-d_1-2}, {}^{B}s^{2k_o n-1}_{n-2}\right) \end{pmatrix}$$

gdzie: zgodnie ze sposobem wyznaczania [m, n] mamy:

$d_1 = m - b_0 - k_0\, n$; $b_1 = n - d_1$

Po $\frac{wm}{2} = \frac{[w,n]}{2}$ – krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy, że:

$d_{w-1} = m - b_{w-2} - k_0\, n = 0$ i wtedy mamy następujące przekształcenie:

$${}^{ext_q(A\times B)}f_{x_0^{\frac{[m,n]}{2}}} =$$

$$\begin{pmatrix} \left({}^{A}s^{wm,}_{0}, {}^{B}s^{wm}_{0}\right)\left({}^{A}s^{wm,}_{0}, {}^{B}s^{wm}_{0}\right), \ldots, \left({}^{A}s^{wm,}_{0}, {}^{B}s^{wm}_{n-2}\right)\left({}^{A}s^{wm,}_{0}, {}^{B}s^{wm}_{n-2}\right)\left({}^{A}s^{wm,}_{0}, {}^{B}s^{wm}_{0}\right)\left({}^{A}s^{wm,}_{0}, {}^{B}s^{wm}_{0}\right) \\ , \ldots, \left({}^{A}s^{wm,}_{0}, {}^{B}s^{wm}_{n-2}\right)\left({}^{A}s^{wm,}_{0}, {}^{B}s^{wm}_{n-2}\right), \ldots, \left({}^{A}s^{wm,}_{m-2}, {}^{B}s^{wm}_{0}\right)\left({}^{A}s^{wm,}_{m-2}, {}^{B}s^{wm}_{0}\right), \ldots, \left({}^{A}s^{wm,}_{m-2}, {}^{B}s^{wm}_{n-2}\right) \\ \left({}^{A}s^{wm,}_{m-2}, {}^{B}s^{wm}_{n-2}\right)\left({}^{A}s^{wm,}_{m-2}, {}^{B}s^{wm}_{0}\right)\left({}^{A}s^{wm,}_{m-2}, {}^{B}s^{wm}_{0}\right), \ldots, \left({}^{A}s^{wm,}_{m-2}, {}^{B}s^{wm}_{n-2}\right)\left({}^{A}s^{wm,}_{m-2}, {}^{B}s^{wm}_{n-2}\right) \end{pmatrix}$$

.

.

.

$$\begin{pmatrix}\left({}^{A}s_{1}^{wm-1},{}^{B}s_{1}^{wm-1}\right)\left({}^{A}s_{1}^{wm-1},{}^{B}s_{1}^{wm-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{1}^{wm-1},{}^{B}s_{n-1}^{wm-1}\right)\left({}^{A}s_{1}^{wm-1},{}^{B}s_{n-1}^{wm-1}\right)\\ \left({}^{A}s_{1}^{wm-1},{}^{B}s_{1}^{wm-1}\right)\left({}^{A}s_{1}^{wm-1},{}^{B}s_{1}^{wm-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{1}^{wm-1},{}^{B}s_{n-1}^{wm-1}\right)\left({}^{A}s_{1}^{wm-1},{}^{B}s_{n-1}^{wm-1}\right),\ldots,\\ \left({}^{A}s_{m-1}^{wm-1},{}^{B}s_{1}^{wm-1}\right)\left({}^{A}s_{m-1}^{wm-1},{}^{B}s_{1}^{wm-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{wm-1},{}^{B}s_{n-1}^{wm-1}\right)\left({}^{A}s_{m-1}^{wm-1},{}^{B}s_{n-1}^{wm-1}\right)\\ \left({}^{A}s_{m-1}^{wm-1},{}^{B}s_{1}^{wm-1}\right)\left({}^{A}s_{m-1}^{wm-1},{}^{B}s_{1}^{wm-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{wm-1},{}^{B}s_{n-1}^{wm-1}\right)\left({}^{A}s_{m-1}^{wm-1},{}^{B}s_{n-1}^{wm-1}\right)\end{pmatrix}$$

Po σ_0 i $\frac{wm}{2}=\frac{[m,n]}{2}$ – krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0 x_0^{\frac{[m,n]}{2}}}=$$

$$\begin{pmatrix}\left({}^{A}s_{1}^{wm+1},{}^{B}s_{1}^{wm+1}\right)\left({}^{A}s_{1}^{wm+1},{}^{B}s_{1}^{wm+1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{1}^{wm+1},{}^{B}s_{n-1}^{wm+1}\right)\left({}^{A}s_{1}^{wm+1},{}^{B}s_{n-1}^{wm+1}\right)\\ \left({}^{A}s_{1}^{wm+1},{}^{B}s_{1}^{wm+1}\right)\left({}^{A}s_{1}^{wm+1},{}^{B}s_{1}^{wm+1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{1}^{wm+1},{}^{B}s_{n-1}^{wm+1}\right)\left({}^{A}s_{1}^{wm+1},{}^{B}s_{n-1}^{wm+1}\right),\ldots,\\ \left({}^{A}s_{m-1}^{wm+1},{}^{B}s_{1}^{wm+1}\right)\left({}^{A}s_{m-1}^{wm+1},{}^{B}s_{1}^{wm+1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{wm+1},{}^{B}s_{n-1}^{wm+1}\right)\left({}^{A}s_{m-1}^{wm+1},{}^{B}s_{n-1}^{wm+1}\right)\\ \left({}^{A}s_{m-1}^{wm+1},{}^{B}s_{1}^{wm+1}\right)\left({}^{A}s_{m-1}^{wm+1},{}^{B}s_{1}^{wm+1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{wm+1},{}^{B}s_{n-1}^{wm+1}\right)\left({}^{A}s_{m-1}^{wm+1},{}^{B}s_{n-1}^{wm+1}\right)\end{pmatrix}$$

•

•

•

$$\begin{pmatrix}\left({}^{A}s_{1}^{wm},{}^{B}s_{1}^{wm}\right)\left({}^{A}s_{1}^{wm},{}^{B}s_{1}^{wm}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{1}^{wm},{}^{B}s_{n-1}^{wm}\right)\left({}^{A}s_{1}^{wm},{}^{B}s_{n-1}^{wm}\right)\left({}^{A}s_{1}^{wm},{}^{B}s_{1}^{wm}\right)\left({}^{A}s_{1}^{wm},{}^{B}s_{1}^{wm}\right),\ldots,\\ \left({}^{A}s_{1}^{wm},{}^{B}s_{n-1}^{wm}\right)\left({}^{A}s_{1}^{wm},{}^{B}s_{n-1}^{wm}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{wm},{}^{B}s_{1}^{wm}\right)\left({}^{A}s_{m-1}^{wm},{}^{B}s_{1}^{wm}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{wm},{}^{B}s_{n-1}^{wm}\right)\left({}^{A}s_{m-1}^{wm},{}^{B}s_{n-1}^{wm}\right)\\ \left({}^{A}s_{m-1}^{wm},{}^{B}s_{1}^{wm}\right)\left({}^{A}s_{m-1}^{wm},{}^{B}s_{1}^{wm}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{wm},{}^{B}s_{n-1}^{wm}\right)\left({}^{A}s_{m-1}^{wm},{}^{B}s_{n-1}^{wm}\right)\end{pmatrix}$$

Po σ_0^{q+1} i $\frac{wm}{2}=\frac{[wm]}{2}$ – krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{q+1} x_0^{\frac{[m,n]}{2}}}={}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0 x_0^{\frac{[m,n]}{2}}}$$

Dla przekształcenia $^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0 x_0^{\frac{wm}{2}}}$ pod wpływem q – krotnego działania litery σ_0 otrzymujemy ponownie przekształcenie $^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0 x_0^{\frac{wm}{2}}}$.

W dalszych rozważaniach będziemy analizować przekształcenie $^{ext_q(A\times B)}f_{x_0^{\frac{wm}{2}}}$. Rozważania dla przekształceń $^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0 x_0^{\frac{wm}{2}}},\ldots,{}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{q} x_0^{\frac{wm}{2}}}$ są analogiczne. Z przytoczonych powyżej rozważań opartych na sposobie wyznaczania najmniejszej wspólnej wielokrotności dwóch liczb oraz uwzględniając definicję rozszerzenia stanowego automatu z klasy EXT DFASC$_2$ wynika, że liczba dotychczas wygenerowanych przekształceń wynosi $q[m,n]$. Niech [m, n] = m w = p. Z przytoczonych rozważań opartych na sposobie wyznaczania najmniejszej wspólnej wielokrotności dwóch liczb [13] oraz uwzględniając definicje rozszerzenia automatu asynchronicznego silnie spójnego wynika, że liczba dotychczas wygenerowanych przekształceń wynosi p . Wtedy po $\frac{p}{2}$ – krotnej konkatenacji słowa otrzymujemy:

$$
{}^{ext_q(A\times B)}f_{\frac{p}{x_0^2}} =
$$

$$
\left(\begin{array}{l}
\left({}^{A}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}, {}^{B}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}\right)\left({}^{A}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}, {}^{B}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}\right), \dots, \left({}^{A}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}, {}^{B}s_{n-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}\right)\left({}^{A}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}, {}^{B}s_{n-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}\right)\\
\left({}^{A}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}, {}^{B}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}\right)\left({}^{A}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}, {}^{B}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}\right), \dots, \left({}^{A}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}, {}^{B}s_{n-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}\right)\left({}^{A}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}, {}^{B}s_{n-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}\right), \dots,\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}, {}^{B}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}, {}^{B}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}\right), \dots, \left({}^{A}s_{m-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}, {}^{B}s_{n-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}, {}^{B}s_{n-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}\right)\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}, {}^{B}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}, {}^{B}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}\right), \dots, \left({}^{A}s_{m-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}, {}^{B}s_{n-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}, {}^{B}s_{n-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}}\right)
\end{array}\right)
$$

.
.
.

$$
\left(\begin{array}{l}
\left({}^{A}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}, {}^{B}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}\right)\left({}^{A}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}, {}^{B}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}\right), \dots, \left({}^{A}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}, {}^{B}s_{n-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}\right)\left({}^{A}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}, {}^{B}s_{n-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}\right)\\
\left({}^{A}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}, {}^{B}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}\right)\left({}^{A}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}, {}^{B}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}\right), \dots, \left({}^{A}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}, {}^{B}s_{n-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}\right)\left({}^{A}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}, {}^{B}s_{n-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}\right), \dots,\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}, {}^{B}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}, {}^{B}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}\right), \dots, \left({}^{A}s_{m-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}, {}^{B}s_{n-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-11}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}, {}^{B}s_{n-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}\right)\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}, {}^{B}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}, {}^{B}s_0^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}\right), \dots, \left({}^{A}s_{m-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}, {}^{B}s_{n-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}, {}^{B}s_{n-2}^{\frac{q-d_{o,o}}{k_1}-1}\right)
\end{array}\right)
$$

gdzie: zgodnie ze sposobem wyznaczania najmniejszej wspólnej wielokrotności, dla trzech liczb [m, n, q] = [[m, n],q] = [p, q], gdzie p = [m, n], patrz[13]:

k_1 - całkowita wielokrotność liczby p w q; $q > p$

$d_{0,0} = q - k_1 p$, $b_{0,0} = p - d_{0,0}$,

$d_{1,1} = q - b_{0,0} - k_1 p$, $b_{1,1} = p - d_{1,1}$

.
.
.

$d_{t\text{-}2,t\text{-}2} = q - b_{t\text{-}3,t\text{-}3} - k_1 p$ $b_{t\text{-}2,t\text{-}2} = p - d_{t\text{-}2,t\text{-}2}$

$d_{t\text{-}1,t\text{-}1} = q - b_{t\text{-}2,t\text{-}2} - k_1 p = 0$

[m, n, q] = [p, q] =[[m, n], q] = q t

W przypadku gdy $d_x < 0$; gdzie $0 < x < t-1$, to w miejsce b_x wpisujemy bezwzględna wartość liczby d_x i obliczenia kontynuujemy dalej.

Gdy $p > q$ to $d_{0,0} = p - k_1 q$, $b_0 = q - d_{0,0}$ i dalej postępujemy analogicznie.

Dowód przeprowadzamy zakładając, że $q > p$.

Po $k_1 \frac{p}{2}$ – krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$ {}^{ext_q(A\times B)}f_{x_0^{k_1\frac{p}{2}}} = $$

$$\left(\begin{array}{l}
\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{0,0}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{0,0}}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{0,0}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{0,0}}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{0,0}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{0,0}}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{0,0}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{0,0}}\right)\\
\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{0,0}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{0,0}}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{0,0}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{0,0}}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{0,0}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{0,0}}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{0,0}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{0,0}}\right),\ldots,\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{0,0}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{0,0}}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{0,0}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{0,0}}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{0,0}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{0,0}}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{0,0}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{0,0}}\right)\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{0,0}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{0,0}}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{0,0}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{0,0}}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{0,0}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{0,0}}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{0,0}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{0,0}}\right)
\end{array}\right)$$

.

.

.

$$\left(\begin{array}{l}
\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{0,0}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{0,0}-1}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{0,0}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{0,0}-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{0,0}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{0,0}-1}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{0,0}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{0,0}-1}\right)\\
\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{0,0}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{0,0}-1}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{0,0}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{0,0}-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{0,0}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{0,0}-1}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{0,0}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{0,0}-1}\right),\ldots,\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{0,0}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{0,0}-1}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{0,0}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{0,0}-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{0,0}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{0,0}-1}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{0,0}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{0,0}-1}\right)\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{0,0}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{0,0}-1}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{0,0}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{0,0}-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{0,0}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{0,0}-1}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{0,0}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{0,0}-1}\right)
\end{array}\right)$$

Po k_1 p – krotnej konkatenacji słowa otrzymujemy:

$$ {}^{ext_q(A\times B)}f_{x_0^{k_1\frac{p}{2}}} = $$

$$\left(\begin{array}{l}
\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}}\right)\\
\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}}\right)\\
,\ldots,\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}}\right)\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}}\right)
\end{array}\right)$$

.

.

.

$$\left(\begin{array}{l}
\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}-1}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}-1}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}-1}\right)\\
\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}-1}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}-1}\right)\left({}^{A}s_{0}^{qq-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}-1}\right),\ldots,\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}-1}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}-1}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}-1}\right)\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}-1}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}-1}\right)
\end{array}\right)$$

gdzie: zgodnie ze sposobem wyznaczania [m, n, q]:

$d_{1,1} = q - b_{0,0} - k_1 p$; $b_{1,1} = p - d_{1,1}$

Po $\frac{qt}{2}$ - krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$ {}^{ext_q(A\times B)}f_{x_0^{\frac{qt}{2}}} = $$

$$\left(\begin{array}{l}
\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{t-1,t-1}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{t-1,t-1}}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{t-1,t-1}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{t-1,t-1}}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{t-1,t-1}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{t-1,t-1}}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{t-1,t-1}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{t-1,t-1}}\right)\\
\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{t-1,t-1}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{t-1,t-1}}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{t-1,t-1}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{t-1,t-1}}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{t-1,t-1}},{}^{B}s_{n-2}^{qq-d_{t-1,t-1}}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{t-1,t-1}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{t-1,t-1}}\right),\ldots,\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{t-1,t-1}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{t-1,t-1}}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{t-1,t-1}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{t-1,t-1}}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{t-1,t-1}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{t-1,t-1}}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{t-1,t-1}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{t-1,t-1}}\right)\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{t-1,t-1}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{t-1,t-1}}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{t-1,t-1}},{}^{B}s_{0}^{q-d_{t-1,t-1}}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{t-1,t-1}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{t-1,t-1}}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{t-1,t-1}},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{t-1,t-1}}\right)
\end{array}\right)$$

.

.

.

$$
\left(\begin{array}{l}
\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}-1}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}-1}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}-1}\right)\\
\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}-1}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}-1}\right)\left({}^{A}s_{0}^{qq-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}-1}\right),\ldots,\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}-1}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}-1}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}-1}\right)\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{0}^{q-d_{1,1}-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}-1}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-d_{1,1}-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-d_{1,1}-1}\right)
\end{array}\right)
$$

gdzie: zgodnie ze sposobem wyznaczania [m, n, q]:

$d_{t-1,t-1} = q - b_{t-2,t-2} - k_1 p = 0.$

Dla $d_{t-1,t-1} = 0$ możemy napisać przekształcenie ${}^{ext_q(A\times B)}f_{x_0^{\frac{qt}{2}}}$ w następującej postaci:

$$
{}^{ext_q(A\times B)}f_{x_0^{\frac{qt}{2}}} =
$$

$$
\left(\begin{array}{l}
\left({}^{A}s_{0}^{0},{}^{B}s_{0}^{0}\right)\left({}^{A}s_{0}^{0},{}^{B}s_{0}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{0},{}^{B}s_{n-2}^{0}\right)\left({}^{A}s_{0}^{0},{}^{B}s_{n-2}^{0}\right)\left({}^{A}s_{0}^{0},{}^{B}s_{0}^{0}\right)\left({}^{A}s_{0}^{0},{}^{B}s_{0}^{0}\right),\ldots,\\
\left({}^{A}s_{0}^{0},{}^{B}s_{n-2}^{0}\right)\left({}^{A}s_{0}^{0},{}^{B}s_{n-2}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{0},{}^{B}s_{0}^{0}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{0},{}^{B}s_{0}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{0},{}^{B}s_{n-2}^{0}\right)\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{0},{}^{B}s_{n-2}^{0}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{0},{}^{B}s_{0}^{0}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{0},{}^{B}s_{0}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{0},{}^{B}s_{n-2}^{0}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{0},{}^{B}s_{n-2}^{0}\right)
\end{array}\right)
$$

.

.

.

$$
\left(\begin{array}{l}
\left({}^{A}s_{0}^{q-1},{}^{B}s_{0}^{q-1}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-1},{}^{B}s_{0}^{q-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{q-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-1}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-1}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-1},{}^{B}s_{0}^{q-1}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-1},{}^{B}s_{0}^{q-1}\right),\ldots,\\
\left({}^{A}s_{0}^{q-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-1}\right)\left({}^{A}s_{0}^{q-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-1},{}^{B}s_{0}^{q-1}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-1},{}^{B}s_{0}^{q-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-1}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-1}\right)\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{q-1},{}^{B}s_{0}^{q-1}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-1},{}^{B}s_{0}^{q-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-1}\right)\left({}^{A}s_{m-2}^{q-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-1}\right)
\end{array}\right)
$$

Po σ_0 i $\frac{qt}{2}$ - krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy

$$
{}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0 x_0^{\frac{qt}{2}}} =
$$

$$
\left(\begin{array}{l}
\left({}^{A}s_{1}^{1},{}^{B}s_{1}^{1}\right)\left({}^{A}s_{1}^{1},{}^{B}s_{1}^{1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{1}^{1},{}^{B}s_{n-1}^{1}\right)\left({}^{A}s_{1}^{1},{}^{B}s_{n-1}^{1}\right)\left({}^{A}s_{1}^{1},{}^{B}s_{1}^{1}\right)\left({}^{A}s_{1}^{1},{}^{B}s_{1}^{1}\right),\ldots,\\
\left({}^{A}s_{1}^{1},{}^{B}s_{n-1}^{1}\right)\left({}^{A}s_{1}^{1},{}^{B}s_{n-1}^{1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{1},{}^{B}s_{1}^{1}\right)\left({}^{A}s_{m-1}^{1},{}^{B}s_{1}^{1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{1},{}^{B}s_{n-1}^{1}\right)\left({}^{A}s_{m-1}^{1},{}^{B}s_{n-1}^{1}\right)\\
\left({}^{A}s_{m-1}^{1},{}^{B}s_{0}^{1}\right)\left({}^{A}s_{m-1}^{1},{}^{B}s_{1}^{1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{1},{}^{B}s_{n-1}^{1}\right)\left({}^{A}s_{m-1}^{1},{}^{B}s_{n-1}^{1}\right)
\end{array}\right)
$$

.

.

.

$$
\left(\begin{array}{l}
\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right)\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right)\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right)\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right)\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\\
\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right)\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right)\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right)\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right)\\
\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{0}^{0}\right)\left({}^{A}s_{m-11}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right)\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right)
\end{array}\right)
$$

Po $\sigma_0^q \frac{qt}{2}$ - krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$$
{}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^q x_0^{\frac{qt}{2}}} =
$$

$$
\left(\begin{array}{l}
\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right)\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right)\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right)\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right)\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\\
\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right)\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right)\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right)\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right)\\
\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{0}^{0}\right)\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right)\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right)
\end{array}\right)
$$

.

.

.

$$\begin{pmatrix} \left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right)\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right)\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right)\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right) \\ \left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right)\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right)\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\ldots, \\ \left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right)\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right)\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{0}^{q-1}\right)\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right) \\ \left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right) \end{pmatrix}$$

Po σ_0^{q+1} i $\frac{qt}{2}$ - krotnej konkatenacji słowa x_0 otrzymujemy:

$${}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{q+1}x_0^{\frac{qt}{2}}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0 x_0^{\frac{qt}{2}}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0}$$

Z przedstawionych powyżej rozważań opartych na sposobie wyznaczania najmniejszej wspólnej wielokrotności wynika, że liczba dotychczas wygenerowanych przekształceń wynosi
[m, n, q]. Dla pozostałych przekształceń otrzymujemy:

$${}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0 x_0^{\frac{qt}{2}}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0\sigma_0}$$

.

.

.

$${}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{q} x_0^{\frac{qt}{2}}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{q+1}}$$

Stąd liczba wykonanych przekształceń jest równa q[m, n, q].
Identyczną liczbę przekształceń uzyskamy rozpoczynając przekształcenie zbioru uporządkowanych par stanów rozszerzenia stanowego iloczynu prostego automatów A i B pod wpływem litery σ_1 zatem otrzymujemy wzór (2).

C.B.D.O.

3.3. Złożoność półgrupy charakterystycznej iloczynu prostego automatów z klasy EXT DFASC$_2$ dla każdego słowa z języka $\Sigma^+ = (\sigma_0 \cup \sigma_1)^+$

Twierdzenie 3.

Niech $ext_q(A\times B) = \left({}^{ext_q(A\times B)}S,\ \Sigma,\ {}^{ext_q(A\times B)}M\right)$ będzie rozszerzeniem stanowym związanym z izomorfizmami $g_0, g_1, \ldots, g^{q-1}$ iloczynu prostego $A\times B = \left({}^{A\times B}S\,\Sigma, {}^{A\times B}M\right)$ automatów $A = \left({}^{A}S, \Sigma, {}^{B}M\right)$ i $B = \left({}^{B}S, \Sigma, {}^{B}M\right)$ z DFASC$_2$ takim, że:
card(^{A}S) = m >2, card(^{B}S) = n >2, $card(\Sigma) = 2$; q – stopień rozszerzenia; wtedy dla każdego słowa z języka $\Sigma^+ = (\sigma_0 \cup \sigma_1)^+$ półgrupa charakterystyczna $\overline{I\left(ext_q(A\times B)\right)^*}$ ustalonego analogu rozszerzenia ma własność:

$$card\left(\overline{I\left(ext_q(A\times B)\right)^*}\right) = 2[m,n,q]\times q \tag{3}$$

Dowód.

Rozważmy język $\Sigma^+ = (\sigma_0 \cup \sigma_1)^+$.

Niech $x_{0'} \in \Sigma^+$ słowa rozpoczynające się od litery σ_0

$x_{1'} \in \Sigma^+$ słowa rozpoczynające się do litery σ_1

$$x_{0'} = \left(\sigma_0^k \sigma_1^l \sigma_0^w, \ldots, \sigma_1^p\right)^+, \ldots, x_{1'} = \left(\sigma_1^k \sigma_0^l \sigma_1^w, \ldots, \sigma_0^p\right)^+; \quad k, l, w, \ldots, p = 1, 2, \ldots$$

Wtedy uwzględniając rys.2 otrzymujemy następujące uporządkowane pary stanów:

$${}^{ext_q(A\times B)}S = \begin{pmatrix} \left({}^{A}s_{0}^{0},{}^{B}s_{0}^{0}\right),\left({}^{A}s_{0}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{0},{}^{B}s_{n-2}^{0}\right),\left({}^{A}s_{0}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{0}^{0}\right),\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots, \\ \left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-2}^{0}\right),\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{0},{}^{B}s_{0}^{0}\right),\left({}^{A}s_{m-2}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{0},{}^{B}s_{n-2}^{0}\right), \\ \left({}^{A}s_{m-2}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{0}^{0}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-2}^{0}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right) \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\begin{pmatrix} \left({}^{A}s_{0}^{q-1},{}^{B}s_{0}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{0}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{q-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{0}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{0}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\ldots, \\ \left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-1},{}^{B}s_{0}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{m-2}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-2}^{q-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{m-2}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right), \\ \left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{0}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{n-2}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right) \end{pmatrix}$$

$${}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0} =$$

$$\begin{pmatrix} \left({}^{A}s_{1}^{1},{}^{B}s_{1}^{1}\right),\left({}^{A}s_{1}^{1},{}^{B}s_{1}^{1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{1}^{1},{}^{B}s_{n-1}^{1}\right),\left({}^{A}s_{1}^{1},{}^{B}s_{n-1}^{1}\right),\left({}^{A}s_{1}^{1},{}^{B}s_{1}^{1}\right),\left({}^{A}s_{1}^{1},{}^{B}s_{1}^{1}\right),\ldots, \\ \left({}^{A}s_{1}^{1},{}^{B}s_{n-1}^{1}\right),\left({}^{A}s_{1}^{1},{}^{B}s_{n-1}^{1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{1},{}^{B}s_{1}^{1}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{1},{}^{B}s_{1}^{1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{1},{}^{B}s_{n-1}^{1}\right), \\ \left({}^{A}s_{m-1}^{1},{}^{B}s_{n-1}^{1}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{1},{}^{B}s_{1}^{1}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{1},{}^{B}s_{1}^{1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{1},{}^{B}s_{n-1}^{1}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{1},{}^{B}s_{n-1}^{1}\right) \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\begin{pmatrix} \left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots, \\ \left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right), \\ \left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right) \end{pmatrix}$$

Po q – krotnej konkatenacji σ_0 otrzymujemy:

$${}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^q} =$$

$$\begin{pmatrix} \left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots, \\ \left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right), \\ \left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{1}^{0}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{0},{}^{B}s_{n-1}^{0}\right) \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\begin{pmatrix} \left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right), \\ \left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\ldots, \\ \left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{1}^{q-1}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{q-1},{}^{B}s_{n-1}^{q-1}\right) \end{pmatrix}$$

q – przekształceń.

Po (q+1) – krotnej konkatenacji litery σ_0 otrzymujemy

$${}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{q+1}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0}.$$

Dla przekształcenia ${}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0}$ pod wpływem q – krotnego działania litery σ_0 otrzymujemy ponownie przekształcenia ${}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0}$. W dalszych rozważaniach będziemy analizować przekształcenia ${}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0}$. Rozważania dla przekształceń ${}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0\sigma_0},\ldots,$ ${}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^q}$ są analogiczne.

$${}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^k} =$$

$$\begin{pmatrix} \left({}^{A}s_{1}^{k(\bmod q)}, {}^{B}s_{1}^{k(\bmod q)}\right), \left({}^{A}s_{1}^{k(\bmod q)}, {}^{B}s_{1}^{(\bmod q)}\right), \ldots, \left({}^{A}s_{1}^{k(\bmod q)}, {}^{B}s_{n-1}^{k(\bmod q)}\right), \left({}^{A}s_{1}^{k(\bmod q)}, {}^{B}s_{n-1}^{k(\bmod q)}\right), \\ \left({}^{A}s_{1}^{k(\bmod q)}, {}^{B}s_{1}^{k(\bmod q)}\right), \left({}^{A}s_{1}^{k(\bmod q)}, {}^{B}s_{1}^{k(\bmod q)}\right), \ldots, \left({}^{A}s_{1}^{k(\bmod q)}, {}^{B}s_{n-1}^{k(\bmod q)}\right), \left({}^{A}s_{1}^{k(\bmod q)}, {}^{B}s_{n-1}^{k(\bmod q)}\right), \ldots, \\ \left({}^{A}s_{m-1}^{k(\bmod q)}, {}^{B}s_{1}^{k(\bmod q)}\right), \left({}^{A}s_{m-1}^{k(\bmod q)}, {}^{B}s_{1}^{k(\bmod q)}\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-1}^{k(\bmod q)}, {}^{B}s_{n-1}^{k(\bmod q)}\right), \left({}^{A}s_{m-1}^{k(\bmod q)}, {}^{B}s_{n-1}^{k(\bmod q)}\right), \\ \left({}^{A}s_{m-1}^{k(\bmod q)}, {}^{B}s_{1}^{k(\bmod q)}\right), \left({}^{A}s_{m-1}^{k(\bmod q)}, {}^{B}s_{1}^{k(\bmod q)}\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-1}^{k(\bmod q)}, {}^{B}s_{n-1}^{k(\bmod q)}\right), \left({}^{A}s_{m-1}^{k(\bmod q)}, {}^{B}s_{n-1}^{k(\bmod q)}\right) \end{pmatrix}$$

•

•

•

$$\begin{pmatrix} \left({}^{A}s_{1}^{(k-1)\bmod q}, {}^{B}s_{1}^{(k-1)\bmod q}\right), \left({}^{A}s_{1}^{(k-1)\bmod q}, {}^{B}s_{1}^{(k-1)\bmod q}\right), \ldots, \left({}^{A}s_{1}^{(k-1)\bmod q}, {}^{B}s_{n-1}^{(k-1)\bmod q}\right), \\ \left({}^{A}s_{1}^{(k-1)\bmod q}, {}^{B}s_{n-1}^{(k-1)\bmod q}\right), \left({}^{A}s_{1}^{(k-1)\bmod q}, {}^{B}s_{1}^{(k-1)\bmod q}\right), \left({}^{A}s_{1}^{(k-1)\bmod q}, {}^{B}s_{1}^{(k-1)\bmod q}\right), \ldots, \\ \left({}^{A}s_{1}^{(k-1)\bmod q}, {}^{B}s_{n-1}^{(k-1)\bmod q}\right), \left({}^{A}s_{1}^{(k-1)\bmod q}, {}^{B}s_{n-1}^{(k-1)\bmod q}\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-1}^{(k-1)\bmod q}, {}^{B}s_{1}^{(k-1)\bmod q}\right), \\ \left({}^{A}s_{m-1}^{(k-1)\bmod q}, {}^{B}s_{1}^{(k-1)\bmod q}\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-1}^{(k-1)\bmod q}, {}^{B}s_{n-1}^{(k-1)\bmod q}\right), \left({}^{A}s_{m-1}^{(k-1)\bmod q}, {}^{B}s_{n-1}^{(k-1)\bmod q}\right), \\ \left({}^{A}s_{m-1}^{(k-1)\bmod q}, {}^{B}s_{1}^{(k-1)\bmod q}\right), \left({}^{A}s_{m-1}^{(k-1)\bmod q}, {}^{B}s_{1}^{(k-1)\bmod q}\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-1}^{(k-1)\bmod q}, {}^{B}s_{n-1}^{(k-1)\bmod q}\right), \\ \left({}^{A}s_{m-1}^{(k-1)\bmod q}, {}^{B}s_{n-1}^{(k-1)\bmod q}\right) \end{pmatrix}$$

$${}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k+1}} =$$

$$\begin{pmatrix} \left({}^{A}s_{1}^{(k+1)\bmod q}, {}^{B}s_{1}^{(k+1)\bmod q}\right), \left({}^{A}s_{1}^{(k+1)\bmod q}, {}^{B}s_{1}^{(k+1)\bmod q}\right), \ldots, \left({}^{A}s_{1}^{(k+1)\bmod q}, {}^{B}s_{n-1}^{(k+1)\bmod q}\right), \\ \left({}^{A}s_{1}^{(k+1)\bmod q}, {}^{B}s_{n-1}^{(k+1)\bmod q}\right), \left({}^{A}s_{1}^{(k+1)\bmod q}, {}^{B}s_{1}^{(k+1)\bmod q}\right), \left({}^{A}s_{1}^{(k+1)\bmod q}, {}^{B}s_{1}^{(k+1)\bmod q}\right), \ldots, \\ \left({}^{A}s_{1}^{(k+1)\bmod q}, {}^{B}s_{n-1}^{(k+1)\bmod q}\right), \left({}^{A}s_{1}^{(k+1)\bmod q}, {}^{B}s_{n-1}^{(k+1)\bmod q}\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-1}^{(k+1)\bmod q}, {}^{B}s_{1}^{(k+1)\bmod q}\right), \\ \left({}^{A}s_{m-1}^{(k+1)\bmod q}, {}^{B}s_{1}^{(k+1)\bmod q}\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-1}^{(k+1)\bmod q}, {}^{B}s_{n-1}^{(k+1)\bmod q}\right), \left({}^{A}s_{m-1}^{(k+1)\bmod q}, {}^{B}s_{n-1}^{(k+1)\bmod q}\right), \\ \left({}^{A}s_{m-1}^{(k+1)\bmod q}, {}^{B}s_{1}^{(k+1)\bmod q}\right), \left({}^{A}s_{m-1}^{(k+1)\bmod q}, {}^{B}s_{1}^{(k+1)\bmod q}\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-1}^{(k+1)\bmod q}, {}^{B}s_{n-1}^{(k+1)\bmod q}\right), \\ \left({}^{A}s_{m-1}^{(k+1)\bmod q}, {}^{B}s_{n-1}^{(k+1)\bmod q}\right) \end{pmatrix}$$

•

•

•

$$\begin{pmatrix} \left({}^{A}s_{1}^{k(\bmod q)}, {}^{B}s_{1}^{k(\bmod q)}\right), \left({}^{A}s_{1}^{k(\bmod q)}, {}^{B}s_{1}^{(\bmod q)}\right), \ldots, \left({}^{A}s_{1}^{k(\bmod q)}, {}^{B}s_{n-1}^{k(\bmod q)}\right), \left({}^{A}s_{1}^{k(\bmod q)}, {}^{B}s_{n-1}^{k(\bmod q)}\right), \\ \left({}^{A}s_{1}^{k(\bmod q)}, {}^{B}s_{1}^{k(\bmod q)}\right)\left({}^{A}s_{1}^{k(\bmod q)}, {}^{B}s_{1}^{k(\bmod q)}\right), \ldots, \left({}^{A}s_{1}^{k(\bmod q)}, {}^{B}s_{n-1}^{k(\bmod q)}\right), \left({}^{A}s_{1}^{k(\bmod q)}, {}^{B}s_{n-1}^{k(\bmod q)}\right) \\ , \ldots, , \left({}^{A}s_{m-1}^{k(\bmod q)}, {}^{B}s_{1}^{k(\bmod q)}\right)\left({}^{A}s_{m-1}^{k(\bmod q)}, {}^{B}s_{1}^{k(\bmod q)}\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-1}^{k(\bmod q)}, {}^{B}s_{n-1}^{k(\bmod q)}\right), \left({}^{A}s_{m-1}^{k(\bmod q)}, {}^{B}s_{n-1}^{k(\bmod q)}\right), \\ \left({}^{A}s_{m-1}^{k(\bmod q)}, {}^{B}s_{1}^{k(\bmod q)}\right), \left({}^{A}s_{m-1}^{k(\bmod q)}, {}^{B}s_{1}^{k(\bmod q)}\right), \ldots, \left({}^{A}s_{m-1}^{k(\bmod q)}, {}^{B}s_{n-1}^{k(\bmod q)}\right), \left({}^{A}s_{m-1}^{k(\bmod q)}, {}^{B}s_{n-1}^{k(\bmod q)}\right) \end{pmatrix}$$

$${}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k+q}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k}}$$

q – przekształceń

Dla $\sigma_0^k \sigma_1^l$ otrzymujemy następujące przekształcenia:

$${}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^k \sigma_1^l} =$$

$$\begin{pmatrix} \left({}^{A}s_{2}^{(k+l)\bmod q}, {}^{B}s_{2}^{(k+l)\bmod q}\right), \left({}^{A}s_{2}^{(k+l)\bmod q}, {}^{B}s_{2}^{(k+l)\bmod q}\right), \ldots, \left({}^{A}s_{2}^{(k+l)\bmod q}, {}^{B}s_{0}^{(k+l)\bmod q}\right), \\ \left({}^{A}s_{2}^{(k+l)\bmod q}, {}^{B}s_{0}^{(k+l)\bmod q}\right), \left({}^{A}s_{2}^{(k+l)\bmod q}, {}^{B}s_{2}^{(k+l)\bmod q}\right), \left({}^{A}s_{2}^{(k+l)\bmod q}, {}^{B}s_{2}^{(k+l)\bmod q}\right), \ldots, \\ \left({}^{A}s_{2}^{(k+l)\bmod q}, {}^{B}s_{0}^{(k+l)\bmod q}\right), \left({}^{A}s_{2}^{(k+l)\bmod q}, {}^{B}s_{0}^{(k+l)\bmod q}\right), \ldots, \left({}^{A}s_{0}^{(k+l)\bmod q}, {}^{B}s_{2}^{(k+l)\bmod q}\right), \\ \left({}^{A}s_{0}^{(k+l)\bmod q}, {}^{B}s_{2}^{(k+l)\bmod q}\right), \ldots, \left({}^{A}s_{0}^{(k+l)\bmod q}, {}^{B}s_{0}^{(k+l)\bmod q}\right), \left({}^{A}s_{0}^{(k+l)\bmod q}, {}^{B}s_{0}^{(k+l)\bmod q}\right), \\ \left({}^{A}s_{0}^{(k+l)\bmod q}, {}^{B}s_{2}^{(k+l)\bmod q}\right), \left({}^{A}s_{0}^{(k+l)\bmod q}, {}^{B}s_{2}^{(k+l)\bmod q}\right), \ldots, \left({}^{A}s_{0}^{(k+l)\bmod q}, {}^{B}s_{0}^{(k+l)\bmod q}\right), \\ \left({}^{A}s_{0}^{(k+l)\bmod q}, {}^{B}s_{0}^{(k+l)\bmod q}\right) \end{pmatrix}.$$

•

•

•

$$\left(\begin{array}{l}\left({}^{A}s_{2}^{(k-1+l)\bmod q},{}^{B}s_{2}^{(k-1+l)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{2}^{(k-1+l)\bmod q},{}^{B}s_{2}^{(k-1+l)\bmod q}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{2}^{(k-1+l)\bmod q},{}^{B}s_{0}^{(k-1+l)\bmod q}\right),\\ \left({}^{A}s_{2}^{(k-1+l)\bmod q},{}^{B}s_{0}^{(k-1+l)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{2}^{(k-1+l)\bmod q},{}^{B}s_{2}^{(k-1+l)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{2}^{(k-1+l)\bmod q},{}^{B}s_{2}^{(k-1+l)\bmod q}\right),\ldots,\\ \left({}^{A}s_{2}^{(k-1+l)\bmod q},{}^{B}s_{0}^{(k-1+l)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{2}^{(k-1+l)\bmod q},{}^{B}s_{0}^{(k-1+l)\bmod q}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{(k-1+l)\bmod q},{}^{B}s_{2}^{(k-1+l)\bmod q}\right),\\ \left({}^{A}s_{0}^{(k-1+l)\bmod q},{}^{B}s_{2}^{(k-1+l)\bmod q}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{(k-1+l)\bmod q},{}^{B}s_{0}^{(k-1+l)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{0}^{(k-1+l)\bmod q},{}^{B}s_{0}^{(k-1+l)\bmod q}\right),\\ \left({}^{A}s_{0}^{(k-1+l)\bmod q},{}^{B}s_{2}^{(k-1+l)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{0}^{(k-1+l)\bmod q},{}^{B}s_{2}^{(k-1+l)\bmod q}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{(k-1+l)\bmod q},{}^{B}s_{0}^{(k-1+l)\bmod q}\right),\\ \left({}^{A}s_{0}^{(k-1+l)\bmod q},{}^{B}s_{0}^{(k-1+l)\bmod q}\right)\end{array}\right)$$

$${}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k+1}\sigma_1^{l}} =$$

$$\left(\begin{array}{l}\left({}^{A}s_{2}^{(k+1+l)\bmod q},{}^{B}s_{2}^{(k+1+l)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{2}^{(k+1+l)\bmod q},{}^{B}s_{2}^{(k+1+l)\bmod q}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{2}^{(k+1+l)\bmod q},{}^{B}s_{0}^{(k+1+l)\bmod q}\right),\\ \left({}^{A}s_{2}^{(k+1+l)\bmod q},{}^{B}s_{0}^{(k+1+l)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{2}^{(k+1+l)\bmod q},{}^{B}s_{2}^{(k+1+l)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{2}^{(k+1+l)\bmod q},{}^{B}s_{2}^{(k+1+l)\bmod q}\right),\ldots,\\ \left({}^{A}s_{2}^{(k+1+l)\bmod q},{}^{B}s_{0}^{(k+1+l)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{2}^{(k+1+l)\bmod q},{}^{B}s_{0}^{(k+1+l)\bmod q}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{(k+1+l)\bmod q},{}^{B}s_{2}^{(k+1+l)\bmod q}\right),\\ \left({}^{A}s_{0}^{(k+1+l)\bmod q},{}^{B}s_{2}^{(k+1+l)\bmod q}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{(k+1+l)\bmod q},{}^{B}s_{0}^{(k+1+l)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{0}^{(k+1+l)\bmod q},{}^{B}s_{0}^{(k+1+l)\bmod q}\right),\\ \left({}^{A}s_{0}^{(k+1+l)\bmod q},{}^{B}s_{2}^{(k+1+l)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{0}^{(k+1+l)\bmod q},{}^{B}s_{2}^{(k+1+l)\bmod q}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{(k+1+l)\bmod q},{}^{B}s_{0}^{(k+1+l)\bmod q}\right),\\ \left({}^{A}s_{0}^{(k+1+l)\bmod q},{}^{B}s_{0}^{(k+1+l)\bmod q}\right)\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l}\left({}^{A}s_{2}^{(k+l)\bmod q},{}^{B}s_{2}^{(k+l)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{2}^{(k+l)\bmod q},{}^{B}s_{2}^{(k+l)\bmod q}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{2}^{(k+l)\bmod q},{}^{B}s_{0}^{(k+l)\bmod q}\right),\\ \left({}^{A}s_{2}^{(k+l)\bmod q},{}^{B}s_{0}^{(k+l)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{2}^{(k+l)\bmod q},{}^{B}s_{2}^{(k+l)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{2}^{(k+l)\bmod q},{}^{B}s_{2}^{(k+l)\bmod q}\right),\ldots,\\ \left({}^{A}s_{2}^{(k+l)\bmod q},{}^{B}s_{0}^{(k+l)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{2}^{(k+l)\bmod q},{}^{B}s_{0}^{(k+l)\bmod q}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{(k+l)\bmod q},{}^{B}s_{2}^{(k+l)\bmod q}\right),\\ \left({}^{A}s_{0}^{(k+l)\bmod q},{}^{B}s_{2}^{(k+l)\bmod q}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{(k+l)\bmod q},{}^{B}s_{0}^{(k+l)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{0}^{(k+l)\bmod q},{}^{B}s_{0}^{(k+l)\bmod q}\right),\\ \left({}^{A}s_{0}^{(k+l)\bmod q},{}^{B}s_{2}^{(k+l)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{0}^{(k+l)\bmod q},{}^{B}s_{2}^{(k+l)\bmod q}\right),\ldots,\left({}^{A}s_{0}^{(k+l)\bmod q},{}^{B}s_{0}^{(k+l)\bmod q}\right),\\ \left({}^{A}s_{0}^{(k+l)\bmod q},{}^{B}s_{0}^{(k+l)\bmod q}\right)\end{array}\right)$$

•

•

•

$${}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^{l}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l}}$$

$${}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l+1}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k+1}\sigma_1^{l}}$$

•

•

•

$${}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l+q}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^{l}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^{l+q}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{x_0^{\frac{[m,n]}{2}}}$$

q – przekształceń

Dla $\sigma_0^k\sigma_1^l\sigma_0^w$ otrzymujemy następujące przekształcenia:

$${}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w}} =$$

$$\left(\begin{array}{l}
\left({}^{A}s_3^{(k+l+w)\bmod q},{}^{B}s_3^{(k+l+w)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_3^{(k+l+w)\bmod q},{}^{B}s_3^{(k+l+w)\bmod q}\right),\ldots,\left({}^{A}s_3^{(k+l+w)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k+l+w)\bmod q}\right),\\
\left({}^{A}s_3^{(k+l+w)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k+l+w)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_3^{(k+l+w)\bmod q},{}^{B}s_3^{(k+l+w)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_3^{(k+l+w)\bmod q},{}^{B}s_3^{(k+l+w)\bmod q}\right),\ldots,\\
\left({}^{A}s_3^{(k+l+w)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k+l+w)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_3^{(k+l+w)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k+l+w)\bmod q}\right),\ldots,\left({}^{A}s_1^{(k+l+w)\bmod q},{}^{B}s_3^{(k+l+w)\bmod q}\right),\\
\left({}^{A}s_1^{(k+l+w)\bmod q},{}^{B}s_3^{(k+l+w)\bmod q}\right),\ldots,\left({}^{A}s_1^{(k+l+w)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k+l+w)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_1^{(k+l+w)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k+l+w)\bmod q}\right),\\
\left({}^{A}s_1^{(k+l+w)\bmod q},{}^{B}s_3^{(k+l+w)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_1^{(k+l+w)\bmod q},{}^{B}s_3^{(k+l+w)\bmod q}\right),\ldots,\left({}^{A}s_1^{(k+l+w)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k+l+w)\bmod q}\right),\\
\left({}^{A}s_1^{(k+l+w)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k+l+w)\bmod q}\right)
\end{array}\right).$$

.
.
.

$$\left(\begin{array}{l}
\left({}^{A}s_3^{(k-1+l+w)\bmod q},{}^{B}s_3^{(k-1+l+w)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_3^{(k-1+l+w)\bmod q},{}^{B}s_3^{(k-1+l+w)\bmod q}\right),\ldots,\left({}^{A}s_3^{(k-1+l+w)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k-1+l+w)\bmod q}\right),\\
\left({}^{A}s_3^{(k-1+l+w)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k-1+l+w)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_3^{(k-1+l+w)\bmod q},{}^{B}s_3^{(k-1+l+w)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_3^{(k-1+l+w)\bmod q},{}^{B}s_3^{(k-1+l+w)\bmod q}\right),\ldots,\\
\left({}^{A}s_3^{(k-1+l+w)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k-1+l+w)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_3^{(k-1+l+w)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k-1+l+w)\bmod q}\right),\ldots,\left({}^{A}s_1^{(k-1+l+w)\bmod q},{}^{B}s_3^{(k-1+l+w)\bmod q}\right),\\
\left({}^{A}s_1^{(k-1+l+w)\bmod q},{}^{B}s_3^{(k-1+l+w)\bmod q}\right),\ldots,\left({}^{A}s_1^{(k-1+l+w)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k-1+l+w)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_1^{(k-1+l+w)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k-1+l+w)\bmod q}\right),\\
\left({}^{A}s_1^{(k-1+l+w)\bmod q},{}^{B}s_3^{(k-1+l+w)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_1^{(k-1+l+w)\bmod q},{}^{B}s_3^{(k-1+l+w)\bmod q}\right),\ldots,\left({}^{A}s_1^{((k-1+l+w))\bmod q},{}^{B}s_1^{(k-1+l+w)\bmod q}\right),\\
\left({}^{A}s_1^{(k-1+l+w)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k-1+l+w)\bmod q}\right)
\end{array}\right)$$

Dla $\sigma_0^{k+1}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w}$ otrzymujemy następujące przekształcenia:

$${}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k+1}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w}} =$$

$$\left(\begin{array}{l}
\left({}^{A}s_3^{(k+1+l+w)\bmod q},{}^{B}s_3^{(k+1+l+w)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_3^{(k+1+l+w)\bmod q},{}^{B}s_3^{(k+1+l+w)\bmod q}\right),\ldots,\left({}^{A}s_3^{(k+1+l+w)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k+1+l+w)\bmod q}\right),\\
\left({}^{A}s_3^{(k+1+l+w)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k+1+l+w)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_3^{(k+1+l+w)\bmod q},{}^{B}s_3^{(k+1+l+w)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_3^{(k+1+l+w)\bmod q},{}^{B}s_3^{(k+1+l+w)\bmod q}\right),\ldots,\\
\left({}^{A}s_3^{(k+1+l+w)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k+1+l+w)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_3^{(k+1+l+w)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k+1+l+w)\bmod q}\right),\ldots,\left({}^{A}s_1^{(k+1+l+w)\bmod q},{}^{B}s_3^{(k+1+l+w)\bmod q}\right),\\
\left({}^{A}s_1^{(k+1+l+w)\bmod q},{}^{B}s_3^{(k+1+l+w)\bmod q}\right),\ldots,\left({}^{A}s_1^{(k+1+l+w)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k+1+l+w)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_1^{(k+1+l+w)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k+1+l+w)\bmod q}\right),\\
\left({}^{A}s_1^{(k+1+l+w)\bmod q},{}^{B}s_3^{(k+1+l+w)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_1^{(k+1+l+w)\bmod q},{}^{B}s_3^{(k+1+l+w)\bmod q}\right),\ldots,\left({}^{A}s_1^{(k+1+l+w)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k+1+l+w)\bmod q}\right),\\
\left({}^{A}s_1^{(k+1+l+w)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k+1+l+w)\bmod q}\right)
\end{array}\right)$$

.
.
.

$$\left(\begin{array}{l}
\left({}^{A}s_3^{(k+l+w)\bmod q},{}^{B}s_3^{(k+l+w)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_3^{(k+l+w)\bmod q},{}^{B}s_3^{(k+l+w)\bmod q}\right),\ldots,\left({}^{A}s_3^{(k+l+w)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k+l+w)\bmod q}\right),\\
\left({}^{A}s_3^{(k+l+w)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k+l+w)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_3^{(k+l+w)\bmod q},{}^{B}s_3^{(k+l+w)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_3^{(k+l+w)\bmod q},{}^{B}s_3^{(k+l+w)\bmod q}\right),\ldots,\\
\left({}^{A}s_3^{(k+l+w)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k+l+w)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_3^{(k+l+w)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k+l+w)\bmod q}\right),\ldots,\left({}^{A}s_1^{(k+l+w)\bmod q},{}^{B}s_3^{(k+l+w)\bmod q}\right),\\
\left({}^{A}s_1^{(k+l+w)\bmod q},{}^{B}s_3^{(k+l+w)\bmod q}\right),\ldots,\left({}^{A}s_1^{(k+l+w)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k+l+w)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_1^{(k+l+w)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k+l+w)\bmod q}\right),\\
\left({}^{A}s_1^{(k+l+w)\bmod q},{}^{B}s_3^{(k+l+w)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_1^{(k+l+w)\bmod q},{}^{B}s_3^{(k+l+w)\bmod q}\right),\ldots,\left({}^{A}s_1^{(k+l+w)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k+l+w)\bmod q}\right),\\
\left({}^{A}s_1^{(k+l+w)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k+l+w)\bmod q}\right)
\end{array}\right)$$

$${}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w}}$$

.
.
.

$${}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l+q}\sigma_0^{w}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w}}$$

$${}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w+1}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k+1}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l+1}\sigma_0^{w}}$$

.
.
.

$$
{}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^k\sigma_1^l\sigma_0^{w+q}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^l\sigma_0^{w}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^k\sigma_1^{l+q}\sigma_0^{w}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^k\sigma_1^l\sigma_0^{w}} =
$$

$$
{}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^l\sigma_0^{w+q}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^{l+q}\sigma_0^{w}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^k\sigma_1^{l+q}\sigma_0^{w+q}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^{l+q}\sigma_0^{w+q}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{x_0^{\frac{[m,n,q]}{2}}}
$$

q – przekształceń

.
.
.

Dla $\sigma_0^k\sigma_1^l\sigma_0^w,\dots,\sigma_1^p$ otrzymujemy następujące przekształcenia:.

$$
{}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^k\sigma_1^l\sigma_0^w,\dots,\sigma_1^p} =
$$

$$
\begin{pmatrix}
\left({}^{A}s_0^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_0^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_0^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_0^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\dots,\\
\left({}^{A}s_0^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{n-2}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_0^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{n-2}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\\
\left({}^{A}s_0^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_0^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_0^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_0^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\dots,\\
\left({}^{A}s_0^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{n-2}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_0^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{n-2}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\dots,\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_0^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{m-2}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_0^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\dots,\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{n-2}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{m-2}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{n-2}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right)\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_0^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{m-2}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{A}s_0^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\dots,\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{n-2}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{m-2}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{n-2}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right)
\end{pmatrix}
$$

.
.
.

$$
\begin{pmatrix}
\left({}^{A}s_0^{(k-1+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_0^{(k-1+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_0^{(k-1+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_0^{(k-1+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\dots,\\
\left({}^{A}s_0^{(k-1+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{n-2}^{(k-1+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_0^{(k-1+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{n-2}^{(k-1+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\\
\left({}^{A}s_0^{(k-1+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_0^{(k-1+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_0^{(k-1+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_0^{(k-1+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\dots,\\
\left({}^{A}s_0^{(k-1+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{n-2}^{(k-1+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_0^{(k-1+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{n-2}^{(k-1+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\dots,\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{(k-1+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_0^{(k-1+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{m-2}^{(k-1+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_0^{(k-1+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\dots,\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{(k-1+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{n-2}^{(k-1+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{m-2}^{(k-1+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{n-2}^{(k-1+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right)\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{(k-1+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_0^{(k-1+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{m-2}^{(k-1+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{A}s_0^{(k-1+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\dots,\\
\left({}^{A}s_{m-2}^{(k-1+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{n-2}^{(k-1+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{m-2}^{(k-1+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{n-2}^{(k-1+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right)
\end{pmatrix}
$$

Dla słowa $\sigma_0^k\sigma_1^l\sigma_0^w,\dots,\sigma_1^p\sigma_0$ otrzymujemy przekształcenie, które już poprzednio zostało wygenerowane.

$$
{}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k+1}\sigma_1^l\sigma_0^w,\dots,\sigma_1^p} =
$$

$$
\begin{pmatrix}
\left({}^{A}s_1^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_1^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\dots,\\
\left({}^{A}s_1^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{n-1}^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_1^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{n-1}^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\\
\left({}^{A}s_1^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_1^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\dots,\\
\left({}^{A}s_1^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{n-1}^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_1^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{n-1}^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\dots,\\
\left({}^{A}s_{m-1}^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\dots,\\
\left({}^{A}s_{m-1}^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{n-1}^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{n-1}^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right)\\
\left({}^{A}s_{m-1}^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_1^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{A}s_1^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\dots,\\
\left({}^{A}s_{m-1}^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{n-1}^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{n-1}^{(k+1+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right)
\end{pmatrix}
$$

$\vdots$

$$\begin{pmatrix}
\left({}^{A}s_{1}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{1}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{1}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{1}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\dots,\\
\left({}^{A}s_{1}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{n-1}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{1}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{n-1}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\\
\left({}^{A}s_{1}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{1}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{1}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{1}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\dots,\\
\left({}^{A}s_{1}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{n-1}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{1}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{n-1}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\dots,\\
\left({}^{A}s_{m-1}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{1}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{1}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\dots,\\
\left({}^{A}s_{m-1}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{n-1}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{n-1}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right)\\
\left({}^{A}s_{m-1}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{1}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{A}s_{1}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\dots,\\
\left({}^{A}s_{m-1}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{n-1}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right),\left({}^{A}s_{m-1}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q},{}^{B}s_{n-1}^{(k+l+w+,\dots,p)\bmod q}\right)
\end{pmatrix}$$

$${}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p}}$$

$${}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l+1}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k+1}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p}}$$

$\vdots$

$${}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l+q}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w+q}\dots\sigma_1^{p}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p}}$$

$${}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w+1}\dots\sigma_1^{p}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k+1}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l+1}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p}}$$

$\vdots$

$${}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l+q}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w+q}\dots\sigma_1^{p}} = \dots = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p+q}}$$

$\vdots$

$${}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k+1}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l+1}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w+1}\dots\sigma_1^{p}} = \dots = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p+1}}$$

$\vdots$

$$\begin{aligned}
&{}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l+q}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p}} = \dots = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w+q}\dots\sigma_1^{p+q}} = \dots =\\
&{}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p+q}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^{l+q}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p}} = \dots = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w+q}\dots\sigma_1^{p+q}} = \dots =\\
&{}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p+q}} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l+q}\sigma_0^{w+q}\dots\sigma_1^{p}} = \dots = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l+q}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p+q}} = \dots =\\
&{}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w+q}\dots\sigma_1^{p+q}} = \dots = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^{l+q}\sigma_0^{w+q}\dots\sigma_1^{p}} = \dots = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^{l+q}\sigma_0^{w}\dots\sigma_1^{p+q}} = \dots =\\
&{}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k}\sigma_1^{l+q}\sigma_0^{w+q}\dots\sigma_1^{p+q}} = \dots = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^{l}\sigma_0^{w+q}\dots\sigma_1^{p+q}} = \dots = {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^{k+q}\sigma_1^{l+q}\sigma_0^{w+q}\dots\sigma_1^{p+q}} =
\end{aligned}$$

$${}^{ext_q(A\times B)}f_{x_0^{\frac{[m,n,q]}{2}}}$$

Jak wynika z powyższych rozważań dla każdego słowa $x_{0'} = \left(\sigma_0^k \sigma_1^l \sigma_0^w,...,\sigma_1^p\right)^+$ możemy wygenerować tylko następujące przekształcenia:

[m, n, q]- przekształceń

$$\left.\begin{bmatrix} {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0} & {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0\sigma_1} \cdots & {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0 x_0^{\frac{[m,n,q]}{2}}} \\ {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^2} & {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^2\sigma_1} \cdots & {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^2 x_0^{\frac{[m,n,q]}{2}}} \\ . & & \\ . & & \\ . & & \\ {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^q} & {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^q\sigma_1} \cdots & {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_0^q x_0^{\frac{[m,n,q]}{2}}} \end{bmatrix}\right\} \textbf{q} \text{ - przekształceń}$$

Liczba przekształceń wynosi $[m,n,q]\times q$.

Analogicznie dla słowa, $x_{1'} = \left(\sigma_1^k \sigma_0^l \sigma_1^w,...,\sigma_0^p\right)^+$ możemy wygenerować tylko następujące przekształcenia

[m, n, q]- przekształceń

$$\left.\begin{bmatrix} {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_1} & {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_1\sigma_0} \cdots & {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_1 x_1^{\frac{[m,n,q]}{2}}} \\ {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_1^2} & {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_1^2\sigma_0} \cdots & {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_1^2 x_1^{\frac{[m,n,q]}{2}}} \\ . & & \\ . & & \\ . & & \\ {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_1^q} & {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_1^q\sigma_0} \cdots & {}^{ext_q(A\times B)}f_{\sigma_1^q x_1^{\frac{[m,n,q]}{2}}} \end{bmatrix}\right\} \textbf{q} \text{ - przekształceń}$$

Liczba tych przekształceń wynosi również $[m,n,q]\times q$. A zatem otrzymujemy 2 $[m,n,q]\times q$ różnych przekształceń. Wynika stąd, że dla każdego słowa $card\left(\overline{I\left(ext_q\left(A\times B\ \right)\right)^*}\right) = 2[m,n,q]\times q$. Zatem otrzymujemy wzór 3.

C.B.D.O.

4. Izomorfizm półgrupy charakterystycznej sumy prostej i iloczynu prostego automatów asynchronicznych silnie spójnych i ustalonych analogów ich rozszerzeń.

4.1. Izomorfizm półgrupy charakterystycznej sumy prostej i iloczynu prostego automatów asynchronicznych silnie spójnych z klasy DFASC$_2$ [15]

Twierdzenie 4.

Niech $A = \left({}^A S, \Sigma, {}^A M\right)$ **i** $B = \left({}^B S, \Sigma, {}^B M\right)$ będą automatami z klasyDFASC$_2$ takimi, że $card\left({}^A S\right) > 2$ i $card\left({}^B S\right) > 2$ oraz $\Sigma = \{\sigma_0, \sigma_1\}$; wtedy półgrupa charakterystyczna $\overline{I(A\cup B)}$ sumy prostej automatów A i B jest izomorficzna z półgrupą charakterystyczną $\overline{I(A\times B)}$ iloczynu prostego automatów A i B;

gdzie: card $({}^A S) = m > 2$; card $({}^B S) = n > 2$, m, n liczby naturalne m > n; card $\Sigma = 2$;

$x_0 = \sigma_0\,\sigma_1$; $x_1 = \sigma_1\,\sigma_0$; [m, n] – najmniejsza wspólna wielokrotność liczb m, n, patrz [13].

Dowód.
Wiadomo z [8] jak również z rozważań wprowadzających niniejszej pracy że:
na zbiorze $\sum^*$ zdefiniujemy relację:

$x\ R\ y$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_{s\in S}\ M\ (s,x) = M\ (s,y)$.

Relacja R jest relacją równoważności (relacja Myhilla). Klasę równoważności zawierającą element $x \in \sum^*$ oznaczać będziemy $\overline{x}$, a zbiór wszystkich klas równoważności oznaczać będziemy $\overline{I}$. Zbiór $\overline{I}$ łącznie z operacją $(\circ)$, gdzie $\overline{x} \circ \overline{y} = \overline{xy}$ tworzy półgrupę (odpowiednio monoid), zwaną półgrupa charakterystyczną (odpowiednio monoidem charakterystycznym). Półgrupę charakterystyczną automatu A oznaczać będziemy $\overline{I(A)}$.

W twierdzeniach 1 i 2 [14] wykazano równoliczność rozważanych półgrup charakterystycznych dla sumy prostej i iloczynu prostego automatów

Teraz dowodzimy własność izomorfizmów:

niech $(\varphi): \overline{I(A \cup B)} \longrightarrow \overline{I(A \times B)}$

niech $\varphi(\overline{x}) = \overline{x}$ (def.1)

Z rozważań wprowadzających [8] wynika że $\varphi(\overline{x}) = f_x$ (def.2)

$\forall_{s\in S}\ f_x = M(s,x)$, gdzie x jest dowolnym reprezentantem klasy $\overline{x}$ (def.3)

Aby wykazać, że φ jest izomorfizmem półgrupy charakterystycznej, należy sprawdzić:

(i) $\varphi(\overline{x_1} \circ \overline{x_2}) = \varphi(\overline{x_1 x_2}) = \overline{x_1 x_2} = \overline{x_1} \circ \overline{x_2} = \varphi(\overline{x_1}) \circ \varphi(\overline{x_2})$ (zachowana operacja)

(ii) $\varphi(\overline{x}_1) = \varphi(\overline{x}_2) \Rightarrow z\ def.2\ {}^{(A\times B)}f_{x_1} = {}^{(A\times B)}f_{x_2} \Leftrightarrow {}^{(A\cup B)}f_{x_1} = {}^{(A\cup B)}f_{x_2} \Rightarrow$

$z\ def.3\ \forall_{s\in {}^{A\cup B}S} M(s,x_1) = M(s,x_2) \Leftrightarrow x_1 \equiv x_2 \Rightarrow \overline{x}_1 = \overline{x}_2$

a zatem φ jest „$1 \div 1$"

(iii) $\varphi(\overline{x}) = \overline{x}$ jest oczywiście „na".

Na podstawie twierdzenia 1 i 2 [14] wykazano równoliczność (taki sam zbiór przekształceń) odpowiednich półgrup charakterystycznych dla sumy prostej i iloczynu prostego automatów DFSC$_2$.

C.B.D.O.

4.2. Izomorfizm półgrupy charakterystycznej sumy prostej i iloczynu prostego automatów asynchronicznych silnie spójnych z klasy EXT DFASC$_2$ [15]

Twierdzenie 5.
Niech $ext_q(A \cup B) = \left({}^{ext_q(A\cup B)}S, \Sigma, {}^{ext_q(A\cup B)}M\right)$ i $ext_q(A \times B) = \left({}^{ext_q(A\times B)}S, \Sigma, {}^{ext_q(A\times B)}M\right)$ będą rozszerzeniami związanymi z izomorfizmami $g^0, g^1\ \ldots\ g^{q-1}$ sumy prostej $A \cup B = \left({}^{(A\cup B)}S, \Sigma, {}^{(A\cup B)}M\right)$ i iloczynu prostego $A \times B = \left({}^{(A\times B)}S, \Sigma, {}^{(A\times B)}M\right)$ automatów $A = \left({}^{A}S, \Sigma, {}^{A}M\right)$ i $B = \left({}^{B}S, \Sigma, {}^{B}M\right)$ z klasy DFSC$_2$ takimi, że $card\left({}^{A}S\right) > 2$ i $card\left({}^{B}S\right) > 2$ oraz $\Sigma = \{\sigma_0, \sigma_1\}$; wtedy półgrupa charakterystyczna $\overline{I\left(\left(ext_q(A \cup B)\right)^*\right)}$ ustalonego analogu rozszerzenia sumy prostej automatów A i B jest izomorficzna z półgrupą charakterystyczną $\overline{I\left(\left(ext_q(A \times B)\right)^*\right)}$ ustalonego analogu rozszerzenia iloczynu prostego automatów A i B.

Dowód.
W twierdzeniu 1 [16] i twierdzeniu 2 [17] i wykazano równoliczność odpowiednich półgrup charakterystycznych ustalonych analogów rozszerzenia dla sumy prostej i iloczynu prostego automatów:

niech $\varphi : \overline{I\left(ext_q(A \cup B)\right)^*} \rightarrow \overline{I\left(ext_q(A \times B)\right)^*}$

niech $\varphi(\overline{x}) = \overline{x}$ (def.1)

Z rozważań wprowadzających [3] wynika że $\varphi(\overline{x}) = {}^{ext_q(A)}f_x$ (def.2)

$\forall_{s\in {}^{ext_q}S^*}\ {}^{(ext_q(A))^*}f_x^{\ *} = M^*(s,x)$ (def.3) gdzie:

x jest dowolnym reprezentantem z klasy $\overline{x}$, a ${}^{(ext_q(A))^*}f_x^{\,*}$ jest przekształceniem ustalonego analogu rozszerzenia stanowego automatu A związanego z izomorfizmami stanowymi $g^0, g^1, ..., g^{q-1}$.

Aby wykazać, że φ jest izomorfizmem półgrup charakterystycznych należy udowodnić, że:

(i) $\varphi(\overline{x_1} \circ \overline{x_2}) = \varphi(\overline{x_1 x_2}) = \overline{x_1 x_2} = \overline{x_1} \circ \overline{x_2} = \varphi(\overline{x_1}) \circ \varphi(\overline{x_2})$ (zachowana operacja)

(ii) $\varphi(\overline{x_1}) = \varphi(\overline{x_2}) \Rightarrow z\ def.2\ {}^{ext_q(A\times B)}f_{x_1} = {}^{ext_q(A\times B)}f_{x_2} \Leftrightarrow {}^{ext_q(A\cup B)}f_{x_1} = {}^{ext_q(A\cup B)}f_{x_2} \Rightarrow$

$z\ def.3\ {}^{(ext_q(A\cup B))^*}f_{x_1}^{\,*} = {}^{(ext_q(A\cup B))^*}f_{x_2}^{\,*} \Rightarrow \forall_{s\in {}^{ext_q(A\cup B)}S^*} M^*(s, x_1) = M^*(s, x_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1 \equiv x_2 \Rightarrow \overline{x_1} = \overline{x_2}$

a zatem φ jest „$1 \div 1$"

(iii) $\varphi(\overline{x}) = \overline{x}$ jest oczywiście „na".

Na podstawie twierdzenia 1 [16] i twierdzenia 2 [17] wykazano równoliczność (taki sam zbiór przekształceń) dla odpowiednich półgrup charakterystycznych iloczynu prostego i sumy prostej automatów z klasy EXT DFASC$_2$.

C.B.D.O.

4.3. Izomorfizm półgrupy charakterystycznej sumy prostej i iloczynu prostego automatów asynchronicznych silnie spójnych z klasy EXT DFASC$_2$ dla każdego słowa z języka $\Sigma^+ = (\sigma_0 \cup \sigma_1)^+$

Twierdzenie 6.

Niech $ext_q(A\cup B) = \left({}^{ext_q(A\cup B)}S, \Sigma, {}^{ext_q(A\cup B)}M\right)$ i $ext_q(A\times B) = \left({}^{ext_q(A\times B)}S, \Sigma, {}^{ext_q(A\times B)}M\right)$ będą rozszerzeniami związanymi z izomorfizmami g^0, g^1 ... g^{q-1} sumy prostej $A\cup B = \left({}^{(A\cup B)}S, \Sigma, {}^{(A\cup B)}M\right)$ i iloczynu prostego $A\times B = \left({}^{(A\times B)}S, \Sigma, {}^{(A\times B)}M\right)$ automatów $A = \left({}^{A}S, \Sigma, {}^{A}M\right)$ i $B = \left({}^{B}S, \Sigma, {}^{B}M\right)$ z klasy DFSC$_2$ takimi, że $card\left({}^{A}S\right) > 2$ i $card\left({}^{B}S\right) > 2$ oraz $\Sigma^+ = (\sigma_0 \cup \sigma_1)^+$; wtedy półgrupa charakterystyczna $\overline{I\left((ext_q(A\cup B))^*\right)}$ ustalonego analogu rozszerzenia sumy prostej automatów A i B jest izomorficzna z półgrupą charakterystyczną $\overline{I\left((ext_q(A\times B))^*\right)}$ ustalonego analogu rozszerzenia iloczynu prostego automatów A i B.

Dowód.

W pracy [17] twierdzenie 3 przedstawiono złożoność półgrupy charakterystycznej sumy prostej automatów asynchronicznych silnie spójnych i ustalonych analogów ich rozszerzeń dla każdego słowa z języka $\Sigma^+ = (\sigma_0 \cup \sigma_1)^+$. W pracy twierdzenie 3.3. przedstawiono złożoność półgrupy charakterystycznej iloczynu prostego automatów asynchronicznych silnie spójnych i ustalonych analogów ich rozszerzeń dla każdego słowa z języka $\Sigma^+ = (\sigma_0 \cup \sigma_1)^+$.

Dowód na izomorfizm tych półgrup jest analogiczny jak dowód z twierdzenia 4.2.

5. Wnioski

Definicje relacji równoważności Myhilla na zbiorze stanów automatu oraz półgrupy charakterystycznej automatu pozwoliły wydobyć zeń możliwości obliczeniowe . Tak więc na automat spojrzeć można zarówno pod kątem widzenia systemu algebraicznego o charakterze strukturalno językowym, jak i modelu obliczeń.

Wziąwszy pod uwagę iż półgrupa charakterystyczna określa zdolność do przetwarzania informacji, zaś sumę prostą i iloczyn prosty można uważać za realizację – odpowiednio sekwencyjnych i równoległych obliczeń uzyskane rezultaty oznaczają iż owa zdolność nie zależy od realizacji sekwencyjnej lub równoległej (taka sama liczba klas abstrakcji odpowiednich półgrup charakterystycznych)

Dalsze prace powinny być kontynuowane przy wyznaczaniu złożoności półgrup charakterystycznych automatów asynchronicznych spójnych. Szczegółowe rozpatrywanie klas automatów asynchronicznych silnie spójnych i spójnych wynika z powszechnego stosowania tych klas automatów w realizacjach technicznych cyfrowych układów sterujących. Wykorzystując teorię automatów możemy oszacować lub obliczyć złożoność półgrup charakterystycznych automatów. Ma to istotny wpływ na oszacowanie złożoności programów i czasu wizualizacje stanów automatów. Wykorzystując narzędzia programistyczne PsoC Expres mikrosystemu cyfrowego możemy przedstawić model sterowania pojazdu szynowego w postaci grafu automatu (maszyny stanowej) i realizować program w oparciu o sporządzony wcześniej graf automatu. Umożliwia to analizę graficzną zjawisk podczas symulacji sterowania pojazdem szynowym. Mikrosystemy cyfrowe stosowane są obecnie do sterowania hamulców (tablic pneumatycznych) w lokomotywach i jednostkach elektrycznych.

Literatura

[1] *Arbib M.A.: Algebraic theory of machines languages and semigroups, Acadimic Press, New York and London 1968.*

[2] *Aho A.V., Hopcrofy I.E., Ullman I.D.:Projektowanie i analiza algorytmów komputerowych,PWN,Warszawa 1983.*

[3] *Barnes B.: On the groups of automorhism of strongly connected automata, Math.Syst. Theory 4, 4 (1970).*

[4] *Beatty I. C.;On some properties of semigroup of a machine which are preserved under state minimization, Information and Control 11, 3 (1970).*

[5] *Beyga L.: On periodic sums of automata associated with isomorphism, Foundations of Control Enginiering 1,3 (1976).*

[6] *Bocian S.: Złożoność półgrupy charakterystycznej automatów asynchronicznych i ich rozszerzeń, Prace Instytutu Podstaw Informatyki Polskiej Akademii Nauk nr 552, Warszawa, 1984.*

[7] *Bocian S., Mikołajczak.: Computational aspect of assigning characteristic semigroup asychronous automata and their extensions, Colloqia Mathematica Societatis Janos Bolyai nr 44,Amsterdam, New York, Budapest, 1985.*

[8] *Bocian S.: Rozprawa doktorska , Politechnika Poznańska, 1986.*

[9] *Bocian S.: The complexity of semigroup characterization of asynchronous strongly connection automation and their extensions, Computational topology and geometry and computation in teaching mathematic, Universal de Sevilla,1987.*

[10] *Bocian S.: A new method of calculating the smallest common multiple, Computational topology and geometry and computation in teaching mathematic, Universal de Sevilla,1987.*

[11] *Bocian S.: Nowy sposób wyznaczania najmniejszej wspólnej wielokrotności liczb naturalnych, jako model matematyczny automatu w technice komputerowej, Pojazdy szynowe 1/2002.*

[12] *Bocian S.: Złożoność pólgrupy charakterystycznej automatów asynchronicznych silnie spójnych ustalonych analogów ich rozszerzeń związanych z izomorfizmami, TRANSCOMP - XIII INTERNATIONAL CONFERENCE COMPUTER SYSTEMS AIDED SCIENCES, INDUSTRY AND TRANSPORT(Logistyka 6/2009), Zakopane 2009.*

[13] *Bocian S.: Nowy sposób wyznaczania najmniejszej wspólnej wielokrotności liczb naturalnych, OR – 9834 (praca nie publikowana).*

[14] *Bocian S: Złożoność półgrupy charakterystycznej sumy prostej i iloczynu prostego automatów asynchronicznych silnie spójnych, TRANSCOMP - XIV INTERNATIONAL CONFERENCE COMPUTER SYSTEMS AIDED SCIENCES, INDUSTRY AND TRANSPORT(Logistyka 6/2010), Zakopane 2010.*

[15] *Bocian S: Izomorfizm półgrupy charakterystycznej sumy prostej i iloczynu prostego automatów asynchronicznych silnie spójnych i ustalonych analogów ich rozszerzeń TRANSCOMP - XIV INTERNATIONAL CONFERENCE COMPUTER SYSTEMS AIDED SCIENCES, INDUSTRY AND TRANSPORT(Logistyka 6/2010), Zakopane 2010.*

[16] *Bocian S: Złożoność półgrupy charakterystycznej iloczynu prostego automatów asynchronicznych silnie spójnych ustalonych analogów rozszerzeń związanych z izomorfizmami, TRANSCOMP - XIV INTERNATIONAL CONFERENCE COMPUTER SYSTEMS AIDED SCIENCES, INDUSTRY AND TRANSPORT(Logistyka6/2010), Zakopane 2010.*

[17] *Bocian S.: Złożoność półgrupy charakterystycznej sumy prostej automatów asynchronicznych silnie spójnych i ustalonych analogów ich rozszerzeń dla każdego słowa z języka* $\sum^{+} = (\sigma_0 \cup \sigma_1)^{+}$, *Pojazdy Szynowe Nr 4/2010.*

[18] *Fleck A.C.: Isomorphism groups of automata, J. Assoc. Comp. Mach. 9, 4 (1962).*

[19] *Gecseg F.,Peak J.: Algebraic theory of automata, Akademia Kiado, Budapest, 1972.*

[20] *Grzymała-Busse J.W.: On the periodic reprezentation and reducibility of periodic automata, J.Assoc. Comput. Mach. 16, 3(1969).*

[21] *Grzymała-Busse J.W.: On the endomorphisms of finite automata, Mach. Syst. Theory 4, 4 (1970).*

[22] Grzymała-Busse J.W.: Podautomaty automatów skończonych związane ze zmianączsu pracy, Politechnika Poznańska, Rozprawy nr.46, Poznań, 1972.
[23] Kerntopf P.: Podstawowe pojęcia matematyczne w teorii automatów, PWN, Warszawa 1967.
[24] Mikołajczak B., Miądowicz Z.: On the automorphisms group of strongly related automata and structural properties of finite automata and extensions, Foundations of Control Engineering,1,2 (1976).
[25] Mikołajczak B.: On the structure of cyclic automata and their generalized periodic sums, Technical Report, Computer Science Department, Cornell University, 1977.
[26] Mikołajczak B.: On the structure of cyclic automata and their generalized periodic sums, Foundations of Control Engineering, 3,1 (1978).
[27] Mikołajczak B.: Uogólnione przekształcenia okresowe automatów skończonych, Politechnika Poznańska, Rozprawy nr.98, Poznań 1979.
[28] Mikołajczak B.: Algebraiczna i strukturalna teoria automatów, PWN Warszawa - Łódź, 1985.
[29] Mikołajczak B.: Przekształcenia i złożoność obliczeniowa problemów w teorii automatów, PWN Warszawa – Poznań, 1988.
[30] Oehmke R.H.: The semigroup of a strongly connected automaton, Math. Systems Theory, 15 (178).